力学概论

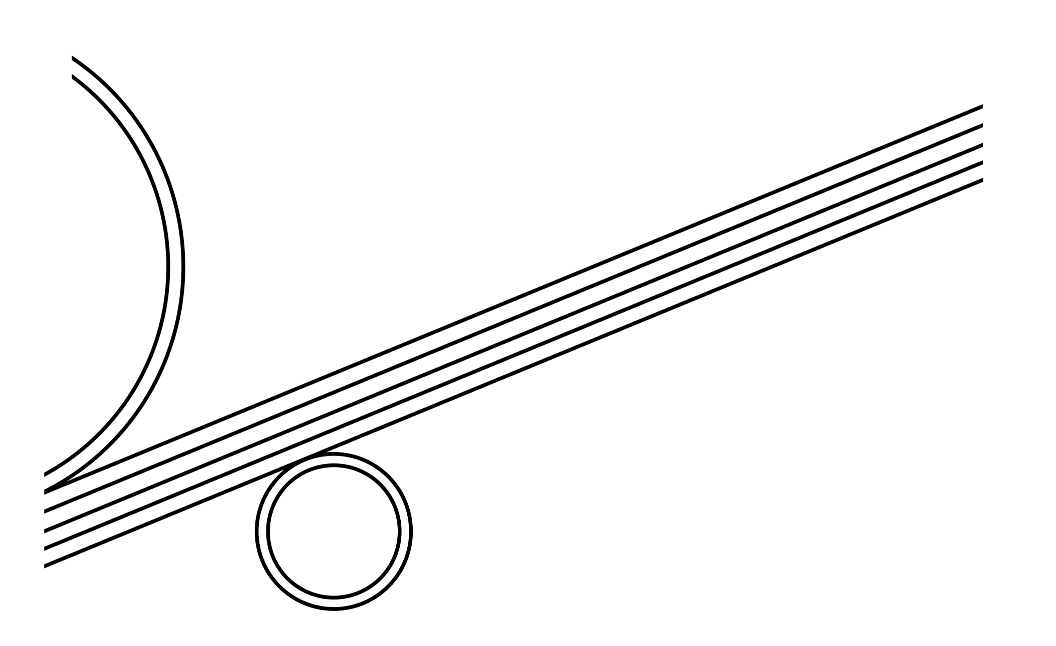
方励之 李淑娴 著



安徽科学技术出版社

力学概论

方励之 李淑娴 著



安徽科学技术出版社

责任编辑：张晓红
封面设计：陈治黄

力 学 概 论

方励之 李淑娴

*

安徽科学技术出版社出版

(合肥市跃进路1号)

安徽省新华书店发行 安徽新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：12.5 字数：309,000

1986年1月第一版 1986年1月第一次印刷

印数 00,001—5,000

统一书号：13200·68 定价：2.5元

内 容 提 要

本书是根据作者在中国科学技术大学及北京大学讲授普通物理的力学部分讲稿整理而成的。其特点是强调用物理的前沿发展去改进基础物理教学，即用现代物理的观点去选择课程的内容，去表现概念和规律。因此，书中包括一些在传统的教材中没有的内容，如牛顿宇宙学等，对许多传统的内容，也采取新的讲授法，使之能与当代物理的进展相呼应。另外。由于力学是物理学的入门和基础，所以本书也注意物理方法的阐述，这对于初学物理的学生是有益的。书中还附有一些习题及答案。

本书可作为综合大学及师范院校的普通物理力学教材，也可供大专院校物理教师及物理教学研究工作者参考。

序

这本书原是一份普通物理课程的力学讲义，它曾在中国科学技术大学沿用多年，也曾在北京大学教授过数次。

普通物理中的力学，是相当难教的，凡是教授过这门课的老师，大都有此体会。一方面，力学是整个物理学的基石，它包含许多基本的观念、方法和理论，需要学生极为准确地加以掌握，以备后继学习之用，另一方面，初入大学的学生，往往看轻力学，误认为新的内容不多，似乎在中学里都已学过，结果力学反而被疏忽了。

这种局面迫使一些教师采用理论力学的方法来教授普通物理力学。这样做，确实可以解决前述问题的第二方面，学生不再感到“似曾相识”了。随着教和学二者的提高，原属理论力学的部分内容的确可以逐渐放到普通物理中来。但是，我们觉得，若仅限于这一途径改进教学，还不能或不完全能解决问题的第一个方面——力学是整个物理的一块基石。

基石到底在哪里起了基石的作用？基石到底如何起了基石的作用？显然，这些“哪里”，这些“如何”只有从物理的当代发展以及前沿研究的角度，才能看得清楚。这就是说，如果我们企图从“物理的基石”这一标准来组织教学，它至少有以下两方面的含义：一是不断用新的现代的观点去整理老的内容，一是不断用新的前沿的重要成果来充实基础。事实上，不同时代的教材的差别，最清楚地表现在这些方面。上述的标准，也就是我们在编写这本教材时，尝试着去追求的。也许有的地方达到了，也许有的地方并未达到。无论成功或失败，它都是我们的追求的记录。

为了使用上的方便，书中编辑了一些例题，每章末也附有一些思考题和习题。由于北京大学物理系和中国科学技术大学物理教研室已编有《物理学习题集》(人民教育出版社，1980)，为了不重复太多，本书中的例题和习题只是标志性的。在教学上需要更多习题时，可以参考上述的习题集。

在使讲义变成这本书的过程中，得到过员汝槐同志的协助，谨致谢意。

作 者

1984 年 4 月

目　　录

绪　论　——　物理世界的统一 …… **1**
第一章　时间，空间和运动学 …… **6**
1.1　时间 …… 6
1.2　芝诺佯谬和时间的度量 …… 9
1.3　长度 …… 12
1.4　参考系 …… 14
1.5　轨迹 …… 16
1.6　速度的瞬时性 …… 19
1.7　曲线运动的速度 …… 23
1.8　加速度 …… 25
1.9　圆周运动和角速度 …… 33
1.10　匀速圆周运动 …… 36
1.11　运动学里的反问题 …… 38
思考题 …… 42
习题 …… 44
第二章　运动学中的相对性 …… **50**
2.1　相对和绝对 …… 50
2.2　位置和轨迹的相对性 …… 51
2.3　速度的相对性 …… 56
2.4　加速度的相对性 …… 61
2.5　伽利略变换 …… 62
2.6　速度合成律的失效 …… 64
2.7　光速不变的结论之一——运动钟的变慢 …… 69
2.8　光速不变的结论之二——运动尺的变短 …… 72

思考题 …… 75
习题 …… 76
第三章　牛顿动力学 …… 80
3.1　惯性定律 …… 80
3.2　牛顿第二定律 …… 82
3.3　牛顿第三定律 …… 86
3.4　一些具体的力 …… 87
3.5　牛顿力学的一些简单应用 …… 91
思考题 …… 101
习题 …… 104
第四章　万有引力 …… 114
4.1　开普勒的行星运动三定律 …… 114
4.2　万有引力规律的建立 …… 117
4.3　引力常数 G …… 121
4.4　单位制及量纲 …… 124
4.5　几个重要的引力物理量 …… 127
4.6　力的几何性 …… 129
4.7　多质点体系的引力作用 …… 135
思考题 …… 140
习题 …… 141
第五章　牛顿宇宙学 …… 146
5.1　哥白尼原理 …… 146
5.2　宇宙中的密度分布 …… 147
5.3　几种速度分布解 …… 149
5.4　奥伯斯佯谬和宇宙的膨胀 …… 150
5.5　宇宙膨胀的动力学 …… 152
习题 …… 156
第六章　能量守恒 …… 157
6.1　机械能守恒 …… 157
6.2　功 …… 161
6.3　引力势能 …… 164

6.4 保守力 …… 170
6.5 一维运动的一般性质 …… 173
思考题 …… 179
习题 …… 181
第七章 振动 …… 189
7.1 弹性力 …… 189
7.2 振动解 …… 192
7.3 简谐振动的几何表述 …… 196
7.4 阻尼振动和 Q 值 …… 197
7.5 共振 …… 201
7.6 简谐振动的合成 …… 204
思考题 …… 209
习题 …… 213
第八章 动量守恒 …… 217
8.1 动量守恒 …… 217
8.2 冲量 …… 223
8.3 碰撞 …… 226
8.4 质心定理 …… 230
思考题 …… 233
习题 …… 235
第九章 角动量守恒 …… 245
9.1 角动量守恒 …… 245
9.2 力矩 …… 247
9.3 隆格-楞茨矢量 …… 253
9.4 转动惯量 …… 265
9.5 转动动能 …… 270
思考题 …… 271
习题 …… 272
第十章 刚体 …… 276
10.1 自由度及刚体的自由度 …… 276
10.2 平动和转动 …… 278

10.3　刚体的动能 …………………………………………………… 284
10.4　刚体的运动方程 ………………………………………………… 287
10.5　陀螺…………………………………………………………… 297
思考题 ………………………………………………………………… 301
习题 …………………………………………………………………… 302
第十一章　狭义相对论基础…………………………………………… 308
11.1　实用的惯性参考系 ……………………………………………… 308
11.2　相对性原理 …………………………………………………… 310
11.3　狭义相对论的基本原理 ………………………………………… 313
11.4　洛伦兹变换 …………………………………………………… 315
11.5　相对论的时空观 ………………………………………………… 319
11.6　相对论力学 …………………………………………………… 333
11.7　质能关系 ……………………………………………………… 337
思考题 ………………………………………………………………… 338
习题 …………………………………………………………………… 339
第十二章　动力学与非惯性参考系 ………………………………… 342
12.1　非惯性参考系和惯性力 ………………………………………… 342
12.2　转动参考系 …………………………………………………… 346
12.3　对绝对时空的批评 ……………………………………………… 354
12.4　等效原理 ……………………………………………………… 359
12.5　局部惯性系 …………………………………………………… 361
思考题 ………………………………………………………………… 363
习题 …………………………………………………………………… 365
全部习题答案 ………………………………………………………… 368

绪　论

—— 物理世界的统一

物理学的兴起，是从经典力学开始的。在经典力学之前，人类的文明中虽然已有不少具有物理价值的发现和发明，但是并不存在一门独立的物理学。因此，我们在学习经典力学的时候，首先应当了解：为什么经典力学成了物理学的起点？经典力学在整个物理学中占据着怎样的地位？

爱因斯坦曾经这样来概括牛顿力学的历史地位；“古代希腊伟大的唯物主义者坚持主张，一切物质事件都应当归结为一系列的有规律的原子运动，而不允许把任何生物的意志作为独立的原因。而且无疑笛卡尔曾按他自己的方式重新探索过这一问题。但是，在当时，它始终不过是一个大胆的奢望，一个哲学学派的成问题的理想而已。在牛顿之前，还没有什么实际的结果来支持那种认为物理因果关系有完整链条的信念。”

这句话的意思是，物理学依赖于一种基本的信念：物理世界存在着完整的因果链条，即自然界是统一的。牛顿力学则是体现这种信念的第一个成功的范例。

从牛顿力学的创建到现在，已经有三百多年了，物理学已经大大发展了，远远超过了经典力学原有的水平。但是，就物理学的最基本的追求和物理学的总目标来说，却一直没有变化。经典力学时代的追求和目标，可以说时至今日仍然是整个物理学的追求和目标。这个最基本的追求和目标，就是自然界的统一。的确，从整个物理学的发展中，可以看到一条鲜明的主线。这就是执着

地追求宇宙的统一，找寻支配宇宙万物的最基本最统一的规律。

相信存在统一，努力寻求统一，如果仅仅作为一种自然观，早在古代已经有了。老子的《道德经》中写有："道生一、一生二、二生三、三生万物。" 这就是中国古代的一种统一观，它完全可以与爱因斯坦所提及的古希腊的哲学相媲美。不过，无论在古代中国或古希腊，统一观都只是一种哲学思辨。

牛顿的力学和古代的哲学不同，它不是思辨地坚持统一观，而是发展了寻找统一的有效的物理方法。牛顿在他的最重要的力学著作《自然哲学的数学原理》中阐明了他采用的方法。他在前言中写道；"我奉献这一作品。作为哲学的数学原理，因为哲学的全部责任似乎在于——从运动的现象去研究自然界中的力，然后从这些力去说明其他的现象。" *这就是说，寻求统一的出发点不是思辨而应是运动现象。自然界中的运动现象是多种多样的，物理学的责任就在于寻找支配这些现象的统一的力。

今天的物理学，仍然大体地沿袭着牛顿所开创的研究途径。寻找统一的力，或统一的相互作用。因此，几乎所有基本的物理理论都称做某种力学，如牛顿力学、电动力学、色动力学等等。每一种新的力学的确立，都标志着我们在追求统一的逾程上达到了一个新的水平。

为了更具体地表达上述的论述。我们利用表 1。表 1 左边列举的是自然界中的种种运动现象，也就是物理学的研究对象。天体的运行和地面物体的运动是人首先看到或接触到的，随后才有时间、空间的概念，所以时空也是一种物理研究的对象，另一类现象是电、磁和光，所有这些物理对象。在二十世纪之前，人们都已知道了。二十世纪以来，又逐渐证实或发现一些新的对象。如原子、原子核、核子以及夸克等。

*牛顿这段话里的"哲学"一词，实际含义相当于今天的"科学"或"物理学"。

表1 的其余部分就表示物理学在寻求统一，寻求完整的因果链条上一些重要的阶段。牛顿的力学和万有引力定律，是物理学上第一次大的统一。在牛顿之前，传统的观念认为支配天体运行和支配地面物体运动的规律是不相同的，有所谓天界和世俗两个世界之分。然而，牛顿发现，天上行星和月亮的运动，实际上和地面落体运动遵从相同的规律，它们都是由引力引起的。这样，牛顿就用他的力学打破了天界和世俗的界限，找到了两个世界的统一。牛顿称引力为万有引力，就是强调这种统一。

第二次大的统一，是由十九世纪的麦克斯韦完成的。他建立了电磁理论，使电、磁及光学现象得到统一。这就是电动力学。

很快发现，牛顿的力学和麦克斯韦的电磁学这两大领域在时

表 1　物理学发展中的统一 *

天体	牛顿力学（1687）					
地面						
时间			广义相对论（1916）			
空间		狭义相对论（1905）				
电						
磁	电动力学（1867）		量子电动力学（1948）			超统一理论 超引力（？）
光				弱电统一理论（1967）		
原子		量子力学（1925）				
核子			弱相互作用（1958）		大统一理论（1970 ~ ？）	
夸克			强相互作用（1934 ~ ？）			
物原?						

* 括号中的数字表示相应的理论建立的年代；有问号的表示尚未完成。

空观上是很不协调的。在前者中，各种匀速运动是平权的，但却假定有绝对空间或绝对速度存在。相反，在后者中，有一个地位特殊的速度，即光速，但却始终测不出这个特殊的速度是相对于哪一个绝对空间而言的。爱因斯坦抛弃了绝对空间观念，使电磁学、力学在新的时空观的基础上达到了协调和统一。

爱因斯坦还曾企图把引力和电磁力二者统一起来，但他的努力没有成功。然而，他却找到了能与麦克斯韦电磁理论相协调的引力理论——广义相对论。

作为引力理论的广义相对论和作为电磁理论的麦克斯韦理论构成了我们今天称为经典物理学的理论基础。

与经典物理相对的是量子论。量子力学最初是作为原子、分子的统一的力学而发展起来的。这种新的力学统一地解释了原子、分子的各种光谱现象，统一地解释了元素周期表，统一地解释了各种不同分子的键合。

在将量子力学扩展到电磁场时，遇到了困难，这本质上是由于电磁场是相对论性的。直到四十年代末，发展了所谓重整化方法才巧妙地解决了上述的困难，使量子论与电磁理论能得以统一，产生了量子电动力学。

到六十年代末，我们已经得到了如下的物理世界的图象。宇宙中的所有物理对象可以分成两大类，一类称为“物质”，如夸克、电子、μ 子等等，另一类称为“相互作用”，如引力、电磁力等等。在目前的宇宙中，有四种基本的相互作用，按它们的强度顺序排列是：核子参与的强相互作用，荷电粒子参与的电磁相互作用，核子及电子、中微子参与的弱相互作用，以及任何粒子都参与的引力相互作用。可以简单地说，宇宙间的一切运动和变化。都可以统一为这四种“力”的作用。但是，追求统一的物理学，似乎认为这种状况仍然不够统一。

1967 年，温伯格和萨拉姆再次着眼于统一，先后提出了电磁

相互作用和弱相互作用的统一理论。随后的一系列实验证明他们的统一理论是正确的。

这一新的成功，促使许多人去找寻把电磁作用、弱作用及强作用都包含在内的统一理论，通常称为“大统一理论”。建立这种理论的工作还没有完成，这是正在研究的领域。

如果大统一能够顺利完成，下一步的统一就是要把引力也统一在内了。引力是物理学最早讨论的一种基本的力。但是，它与其他力的统一最难，因为引力有一系列很特别的性质。例如这种力只有引力却无斥力。就是这种特别性质之一。

企图把引力与其他力统一起来的工作，称为超统一的研究。目前还没有得到有实际意义的结果。它是今天的物理学的一个前沿。实现超统一的一个可能是用超引力理论，这种理论中的统一有一个很有趣的特点，即它把物理学中传统的“物质”与“相互作用”之间的界限也打破了。

总之，从牛顿力学开始，物理学就在寻找宇宙的统一，我们希望找到控制着万事万物运动的极少的几个基点。只有从这个角度我们才容易看清经典力学在整个物理学中的地位和作用，也才能全面地了解学习经典力学对于学习整个物理学的意义和作用。

第一章

时间，空间和运动学

1.1 时　　间

描写物体的运动，要用时间和空间这两个概念。因此，我们先来对时间、空间本身作一些分析。

时间和空间可以说是最平凡的概念了，因为在日常生活中也常常用到它们。不过，若问什么是时间？什么是空间？却又不容易找到恰当的答案。其实，这是两个很难的问题。尽管有不少关于时间和空间的定义，但大都不能令人满意。一种或许可以接受的说法是：时间、空间是物理事件之间的一种次序，时间用以表述事物之同的顺序，空间用以表述事件相互之间的位形。

没有满意的“严格”的理论定义，并不妨碍时间和空间二者在物理中的使用。因为，物理学是一门基于实验的科学，在考查物理学的概念或物理量的时候，首先应当注意它与实验之间是否有明确的、不含糊的关系。对于时间和空间这两个基本概念来说，首要的问题似不是去追究它们的“纯粹”定义，而是应当了解它们是怎样量度的。

量度时间，通常是用钟和表。然而，钟和表并不是测量时间的唯一的工具。原则上。任何具有重复性的过程或现象，都可以作为测量时间的一种钟。自然界里有许多重复性的过程，其中有一些我们早已把它们当作计时标准了。例如，太阳的升没表示天；四季的循环称作年；月亮的盈亏是农历的月。其他的循环过程，如

双星的旋转、人体的脉搏、吊灯的摆动，分子的振动等等，也都可以用作测时的工具。

更一般地说，只要知道了某个物理现象随时间的变化，尽管它不是重复性的过程，也可以用来测定时间。譬如，我们能从一个人的容貌估计出他的年龄，因为容貌这个量与时间之间有确定的关系。这个例子虽然很普通，但某些有用的测时方法与此是很相似的。在确定星体的年龄时，常常就是根据星体的颜色。

钟的种类很多，但有好有坏。比较两个人的脉搏，就会发现它们之间经常有明显的快慢波动，所以，人的脉搏不是一种好钟，它不够稳定。如果比较一下两个单摆的周期，就会发现它们稳定多了。地球自转则是更稳定的钟。

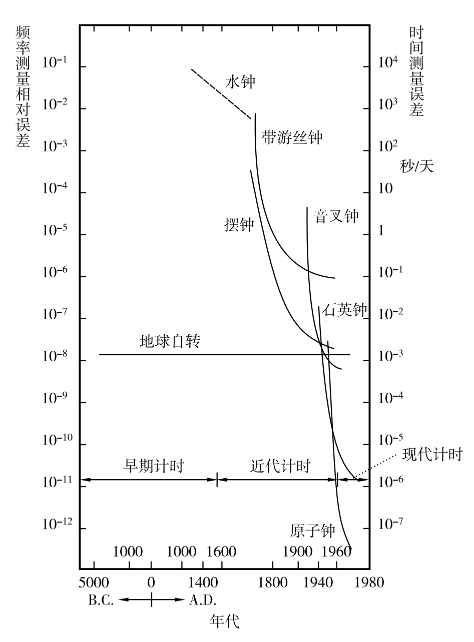


图 1.1 不同年代的时间测量精度

图1.1给出不同年代用不同的钟测量时间所达到的精度。可以看到，地球自转要比各种机械的钟都好。所以，1967 年以前是用地球自转作为标准钟。原子钟是比地球自转更加稳定的钟，现代的精密计时都是用原子钟了。

表 1.1　一些典型物理现象的时间尺度

时间（秒）	周期过程	半衰期或寿命
10^{38}		质子（下限）
10^{18}		宇宙
10^{15}	太阳绕银河中心	^{238}U（地球）
10^{12}		^{226}Ra
10^{9}	哈雷彗星绕太阳	
10^{6}	地球公转	
10^{3}	地球自转	中子
1	脉冲星周期	
10^{-3}	声振动	
10^{-6}		μ 子
10^{-9}		π 介子
10^{-12}	分子转动 原子振动	
10^{-15}	可见光	
10^{-18}		
10^{-21}		
10^{-24}		共振粒子
10^{-43}		普朗克时间

1967 年 10 月在第十三届国际度量衡会议上通过了新的标准钟，它对一秒的时间作如下的规定；位于海平面上的 ^{133}Cs 原子的基态的两个超精细能级在零磁场中跃迁辐射的周期 T 与 1 秒的关系为

$$1\,秒 = 9,192,631,770\,T$$

表1.1 列举了一些典型现象的时间尺度。目前，物理学中涉及的最长的时间是：10^{38} 秒，它是质子寿命的下限。宇宙的年龄大约是 6×10^{17} 秒，即 200 亿年。牛顿力学所涉及的时间尺度大约是 10^{-3}~10^{15} 秒，即从声振动的周期到太阳绕银河中心转动的周期。粒子物理的时间尺度都很小。μ 子的寿命是 2×10^{-6} 秒。已经算是极长寿的了。最短寿的是一些共振粒子，它们的寿命只约有 10^{-24} 秒。目前物理学中涉及的最小的时间是 10^{-42} 秒，称为普朗克时间。普朗克时间被认为是最小的时间，比普朗克时间还要小的范围内，时间的概念可能就不再适用了。

1.2 芝诺佯谬和时间的度量

古希腊哲学家芝诺有一个很著名的论证：跑得最快的神话英雄阿基里斯是永远追不上跑得最慢的东西 (例如一只龟) 的。他的论证如下：因为开始时阿基里斯是在龟的后面，所以，阿基里斯要追上龟，他必定先要到达龟的出发点，这要用有限的时间，在这段时间里龟必定向前跑了，到达前面的一点，而当阿基里斯再到达这点时，龟必定又已到达更前面的一点。如此重复下去，就是进行无穷多次，龟也总不会落在阿基里斯之后。

这个论证被称为芝诺佯谬，如何解开这个佯谬?

关键是在芝诺佯谬中用了两种不同的时间度量。按上节的讨论，任何一种具有重复性的过程。都可以做为“钟”，用其重复的次数来量度时间。芝诺问题中。除了“普通”钟所测得的时间 t，

还利用了一种很特别的钟，该钟使用的重复性过程是：阿基里斯逐次地到达龟在前一次的出发点。我们称这种钟叫芝诺钟，它测得的时间为 t'。

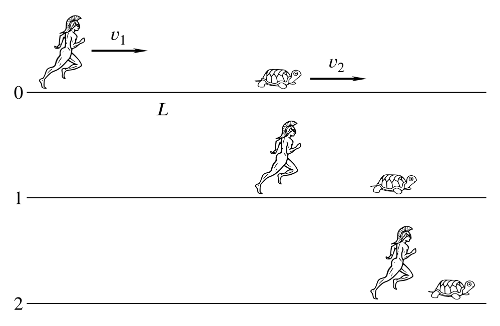


图 1.2 芝诺时的定义

如图1.2，阿基里斯和龟在开始时相距为 L，速度分别为 v_1 及 v_2，并且 $v_1 > v_2$。如果用普通的钟，则阿基里斯将在

$$t = L/\left(v_1 - v_2\right) \tag{1.2.1}$$

时，赶上龟；当 $t > L/\left(v_1 - v_2\right)$ 时，阿基里斯就超过龟了。

图中左边的数字表示的是芝诺时 t'。当 $t' = 1$ 时，阿基里斯到达龟在 0 时的出发点；当 $t' = 2$ 时，阿基里斯到达龟在 1 时的出发点。一般地，当 $t' = n$ 时，阿基里斯到达龟在 $t' = n - 1$ 时的位置。显然，只有当 $t' \to \infty$ 时，阿基里斯才能逼近龟，对于任何有限的 t'，阿基里斯总是落在龟的后面。这就是芝诺的结论。

因此，芝诺断言："阿基里斯永远也追不上龟。"这里"永远"的含意是 $t' \to \infty$。，即芝诺时间的无限。

现在我们来讨论普通时 t 与芝诺时 t' 之间的变换关系。不难验证表1.2 给出的两种时间的对应。因此，一般有

$$t = \sum_{n=0}^{t'-1} \frac{L}{v_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n = \frac{L}{v_1 - v_2}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{t'}\right] \tag{1.2.2}$$

或者

$$t' = \frac{1}{\ln\left(v_2/v_1\right)} \ln\left[1 - \left(\frac{v_1 - v_2}{L}\right) t\right] \tag{1.2.3}$$

式(1.2.2)或式(1.2.3)称为芝诺变换。它给出的 t' 与 t 的关系。在图1.3 中画出。

表 1.2 普通时与芝诺时的关系

芝诺时（t'）	普通时（t）
0	0
1	$\frac{L}{v_1}$
2	$\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_1} \cdot \frac{v_2}{v_1}$
⋮	⋮
n	$\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} + \cdots + \frac{L}{v_1} \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1}$
	$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{L}{v_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^i$

由图1.3看到，芝诺变换是有奇性的，即当 $t = L/\left(v_1 - v_2\right)$ 时，$t' \to \infty$。所以，当芝诺时 t' 从零变化到无限时，它只覆盖了普通时 t 上的一个有限范围，即从零到 $L/\left(v_1 - v_2\right)$。

因此，芝诺佯谬之“佯”，是由于芝诺把永远理解为 $t' \to \infty$。他认为 $t' \to \infty$ 之后就没有时间了，故 $t' \to \infty$ 相当于永远。实际上，从图1.3 看到，在芝诺时 t' 到达无限之后。还是有时间的。但是，在该范围，即 $t > L/\left(v_1 - v_2\right)$，用芝诺钟已经无法度量它们了。简言之，芝诺的佯谬，来源于芝诺时的局限性，芝诺时不可能度量阿基里斯追上龟之后的现象。

芝诺佯谬给我们的启示是，时间与时间的度量不同，一种时间的度量达到无限之后，还是可以有时间的；反之，一种时间的

度量达到无限，从其他的度量看，可能是有限的。

芝诺佯谬还启发我们提出一个更深入的问题，即所谓普通钟或日常钟是否也具有芝诺钟那种局限性？当日常钟 t 的读数达到无限之后，是否也还有时间？是否有 t 也无法度量的现象，即在 $t \to \infty$ 之外的现象？现代物理学的研究，对这些问题的回答都是肯定的。

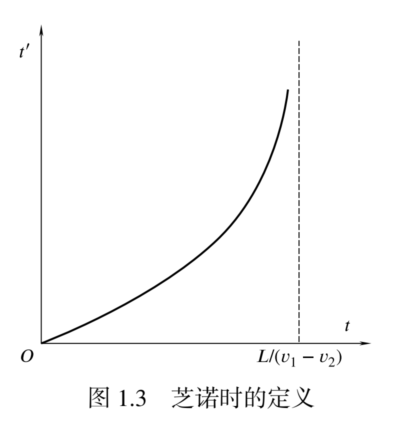


图 1.3 芝诺时的定义

1.3 长 度

长度是空间的一个基本性质。

对长度的测量，在日常的范围中，是用各种各样的尺，如米尺、千分尺、螺旋测微计等等。对于不能用尺直接加以测量的小尺度，可以求助于光学方法。在精密机床上常有光学测量装置；测定胰岛素中原子的位置，是用 X 衍射方法。对于大的尺度，也不能直接用尺去测量，也要求助于光。测量月亮与地球的距离可以用激光测距的方法；测量一些不太远的恒星，可以用三角学方法，利用恒星发出的光。至于银河系之外的遥远天体的距离，同样是用它们发光的一些特征来测定的。

最近，长度的单位和标准，也用光来规定了。

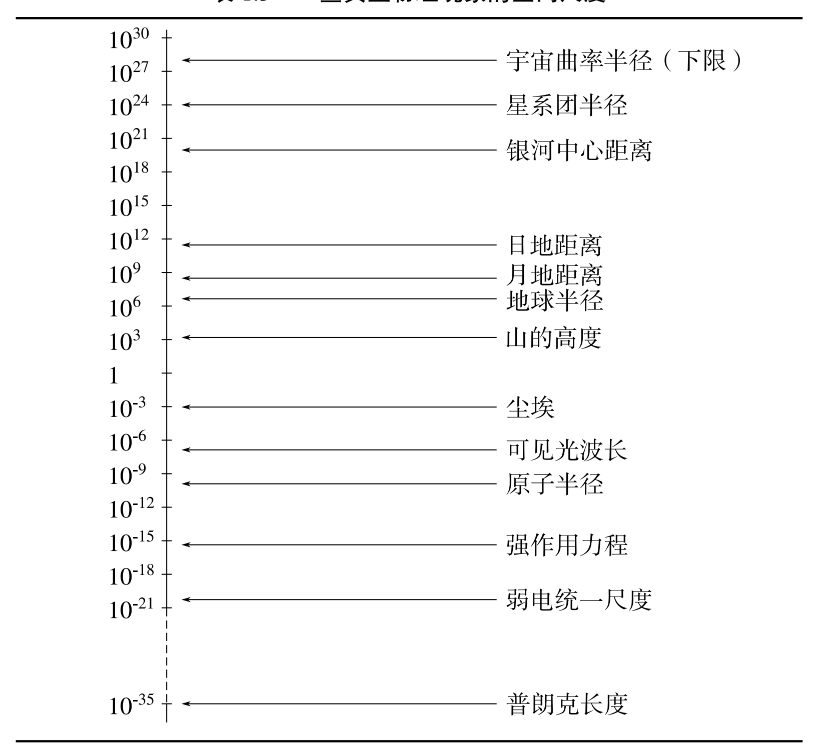
长度的位单是米。1960 年以前，用铂铱米尺作为标准尺，规定米的大小。1960 年以后，改用光的波长作为标准。在第十一届国际计量大会上，正式通过的“米”的定义是 1 米等于 ^{86}Kr 原子

的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间跃迁时所对应的辐射在真空中的波长 λ 的 1,650,763.73 倍，即

$$1米 = 1,650,763.73\,\lambda$$

1983 年 10 月召开的第十七届国际计量大会上已正式通过了

表 1.3　一些典型物理现象的空间尺度



新的米的定义，即用光速值来定义“米”，以代替 1960 年的规定。新的米的定义是，米是光在真空中在 1/299,792,458 秒的时间间隔内所传播的路程长度。按这种新的定义，光速 c 是一固定的常数，即

$$c = 299,792,458 \text{ 米/秒}$$

表1.3中列举了一些典型现象的空间尺度。目前，物理学中涉及的最太长度是 10^{28} 米，它是宇宙曲率半径的下限；已达到的最小长度为 10^{-20} 米，它是弱电统一的特征尺度。普朗克长度约为 10^{-35} 米，被认为是最小的长度，意思是说，在比普朗克长度更小的范围内，长度的概念可能就不再适用了。

1.4 参　考　系

牛顿力学所研究的对象是物体的机械运动。从我们日常见到的车行马跑，及至大到月亮、太阳等星体的运行，小到分子、原子、粒子的一些飞行，都是属于这一类运动。这类运动的共同特点，就是物体在空间的位置时刻在变化着。当然，静止的状态、平衡的状态也是力学的内容之一。

牛顿意义下的运动学，就是研究如何描写物体位置的变化。

研究问题总是从简单的情况入手。我们首先讨论一种被称为质点的物体，即大小为零的物体。我们知道，任何具体的物体总是有一定大小的，没有任何一个物体与质点完全等价。但是，对于某些特定的运动来说，可以足够准确地把物体看作一个质点。譬如，在讨论地球绕太阳的公转时，由于地球的半径 (约 6,400 公里) 比地球与太阳的距离 (约 149,504,000 公里) 小得多，把地球作为质点是相当好的近似，或者说，在此情况下，将地球作为质点处理，是一个足够准确的模型。显然，这种模型是有一定适用限度的。当讨论到地表问题时，再把地球看作质点就大谬不然了。

质点是一个物理对象。对于一个物理对象，用什么数学语言来描写，这并不是一件很自然的事情，我们知道，任何一种数学只是一种逻辑体系，一种逻辑体系能不能正确地描写我们的物理对象，是要认真研究的。物理上，就是要寻找那种能正确地描写物理对象的数学。在牛顿力学中，质点的空间几何性质，相当于欧几里德几何上的点。在解析几何中，点的位置是由它的坐标值来确定的。质点的位置也可以用这种坐标方法来给定。利用坐标方法，首先要给出坐标系，坐标值总是相对于一定的坐标系而言的。在数学上，坐标系的选取是完全任意的，但在物理上，我们要对描写运动的各种物理量进行实际测量，坐标必须固定在一定的物体上。例如，如果选取物体 K 上的某点 O 为坐标原点，并选定 x，y，z 三个轴，质点 A 的位置即由 x, y, z 所确定 (图1.4)。这时，我们称所选取的物体 K 为参考系，而称坐标系 $OXYZ$ 为参考坐标系。

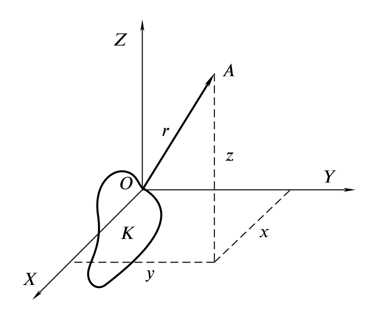


图 1.4　参考系 K 及参考坐标系 $OXYZ$

除了坐标方法外，也可以利用矢量方法来描写质点 A 的位置。我们定义质点 A 的位置矢量 $\mathbf{r}$ 的大小为 OA 的长度，而方向从 O 指向 A。用这个矢量就完全确定了质点 A 的位置。在图 1.4 的坐标系中，位置矢量 r 的分量就是坐标 x，y，z，或写为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.4.1}$$

其中 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 分别为 X，Y，Z 轴上的单位矢量，上述两种描述质点 A 的位置的方法，是完全等价的。

参考系的选择是任意的，可以不用参考系 K，而用另外一

个参考系 K'，譬如，用运动着的车辆来描述质点 A 的位置。由图1.5 看到，对于参考系 K，质点 A 的位置由矢量 $\mathbf{r}$ 描写，而对于参考系 K'，由 $\mathbf{r}'$ 描写。可见，对于同一个质点的位置，用不同参考系来描写时，具有不同的位置矢量。就这一点，我们可以说，位置是具有相对性的物理量。涉及物理量的相对性与绝对性的问题，以后我们还要专门论述。

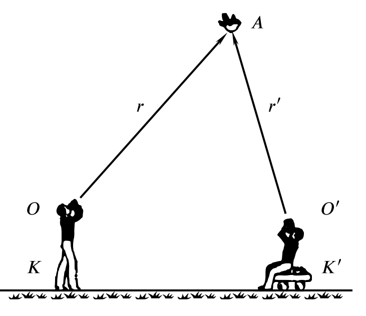


图 1.5 从不同参考系观察同一运动

1.5 轨 迹

谁都看到过，当喷气式飞机在飞行的时候，它的尾部泄出的白烟在天空中构成形状美丽的各样曲线。这些曲线反映了飞机所行经的路程。质点在运动中所经过的各点在空间连成一条曲线，这条曲线我们称之为轨迹。

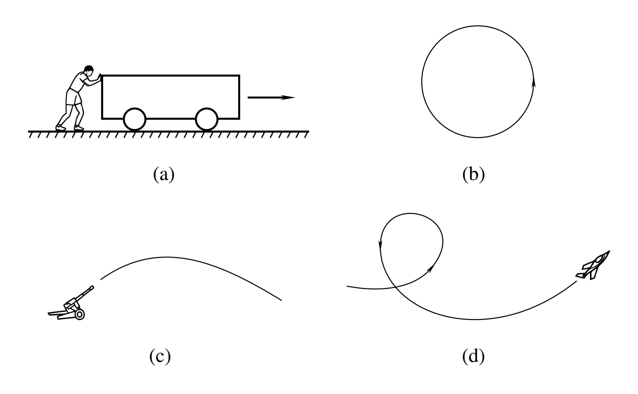


图 1.6 各种运动的轨迹

从图1.6看到，各种运动的轨迹形状是不同的；(a)图是直线，(b)图是圆周，(c)图是抛物线，(d)图是一般曲线。依照轨迹形状的不同，可以把运动分为直线运动和曲线运动两大类。

如何描写轨迹呢？可利用曲线方程来描写。譬如，曲线方程

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = 0$$

就描写了在 $z = 0$ 平面上半径为 r 的圆周运动的轨迹。一般曲线方程可以表示成

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

在历史上很长一个时期内，人们只注重轨迹形状的研究，例如行星走圆形，落体走直线。我们知道，质点运动是位置的变化，它涉及空间和时间两方面。轨迹形状只反映了运动的空间方面的性质，它对于研究运动还是不够的，因为轨迹还没有把质点运动的情况全部表述出来，特别是没有表述它的动态性质。百米赛跑时，所有运动员的轨迹都是直线，但他们各自的运动情况并不全同，否则就分不出名次了。我们不仅应该知道轨迹，而且还应知道质点经过轨迹上各点的时刻。运动是在时间、空间里的现象，关键是把时间描写和空间描写联系起来。直到牛顿之前不久，才特别强调了这一点。

下面，我们举两个直线运动的例子。

对于在平直铁轨上稳定运动的列车上的某一点，所测得的各时刻的位置列于表1.4中，其中位置坐标 x 是以铁轨为参考系的(图1.7)。

表 1.4

时　间（秒）	0	1	2	3	4	5
位置坐标（米）	0	17	34	51	68	85

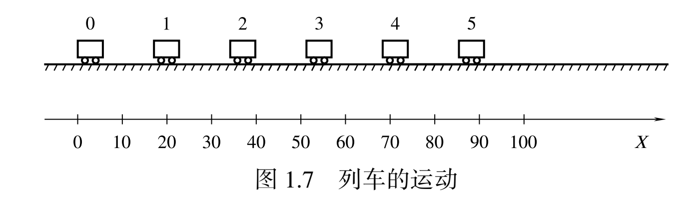


图 1.7 列车的运动

对于从地面上某一高度自由落下的质点 (称为自由落体)，轨迹也是一条直线。如果我们取如图1.8所示的坐标系，则所测得的质点在各时刻的位置列在表1.5中。

表 1.5

时　　间（秒）	0	1	2	3	4
位置坐标（米）	0	4.9	19.6	44.1	78.4

用数学的语言说，表1.4 和表1.5 是给出了质点的位置坐标与时间之间的函数关系，这个函数关系 $x(t)$，称之为轨迹函数，或运动方程式、运动解。

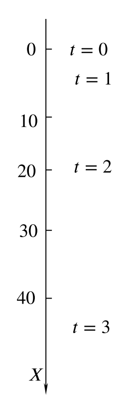


图 1.8 落体的运动

为了便于进行计算，我们常希望能把轨迹函数 $x(t)$ 写成简单的分析表达式。对于表1.4 的 $x(t)$，可以写成

$$x = 17t \tag{1.5.1}$$

对于表1.5 的运动，可以写成 $x = 4.9t^2$。

对于曲线运动，轨迹函数就是位置矢量 $\mathbf{r}$ 作为时间 t 的函数，亦即 $\mathbf{r}(t)$。随着 t 的变化，位置矢量 $\mathbf{r}$ 的端点在空间所划出的曲线，就是质点运动的轨迹 (图1.9)。也可以用质点的三个坐标的函数 $x(t)$，$y(t)$ 及 $z(t)$ 来描写运动，它们与 $r(t)$ 的关系是

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{1.5.2}$$

轨迹也具有相对性。譬如对于从地面上某一高度自由下落的质点，以地面为参考系，看到轨迹是一条直线；而相对于沿平直铁轨稳定运行的列车来说，轨迹则是一条抛物线。同一个物体的运动，在不同的参考系中看到的轨迹形状不一定相同。

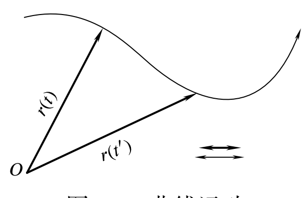


图 1.9　曲线运动

另一方面，对于时间，也必须选取一定的标准，即选取时间原点，才能进行测量。而时间原点的选取，也有任意性，不同的选取法，使轨迹函数的形式也有些差别。

因此，参考系的概念要作些扩充。选取一个参考系应包括：给定放置在某物体上的坐标系，作为测量空间的标准；以及给定一个钟，作为测量时间的标准。

1.6　速度的瞬时性

机械运动的现象，给了我们对“快”、“慢”的经验认识。火车比轮船快，飞机比火车快，而火箭更比飞机快等等。反映质点运动快慢的物理量就是速度，或者确切地说，是速度的数值大小。

先以直线运动为例，当时刻 t_1 时，质点 A 的位置坐标为 $x(t_1)$，当 t_2 时，它的坐标为 $x(t_2)$，我们就用下式来定义质点 A 在 t_1 到 t_2 时间间隔内的平均速度:

$$\langle v\rangle_{t_1\to t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{1.6.1}$$

符号 $\langle\ \rangle$ 表示所讨论的量的平均值。$\langle v\rangle_{t_1\to t_2}$ 的数值表示质点在时

间间隔 $t_1 \to t_2$ 中每单位时同平均走过的距离，它的单位是米/秒。利用表1.4所给出的运动进行计算，就有：在第 1 秒末到第 2 秒末间隔中，

$$\langle v\rangle_{1\to 2} = \frac{34-17}{2-1} = 17\ 米/秒$$

在第 3 秒末到第 5 秒末间隔中，

$$\langle v\rangle_{3\to 5} = \frac{85-51}{5-3} = 17\ 米/秒$$

选两个时间间隔中平均速度是一样的。事实上，如果利用分析表达式(1.5.1) 来计算，就会发现对任何时间间隔，运动的平均速度都是 17 米/秒。这种对于任何时间间隔平均速度总不变的运动，称为匀速直线运动。

由表1.5 或 $x = 4.9t^2$ 所示的自由落体运动，情况就不同了：在第 1 秒末到第 3 秒束的间隔中，

$$\langle v\rangle_{1\to 3} = \frac{44.1-4.9}{3-1} = 19.6\ 米/秒$$

在第 1 秒末到第 2 秒末的间隔中，

$$\langle v\rangle_{1\to 2} = \frac{19.6-4.9}{2-1} = 14.7\ 米/秒$$

在第 2 秒末到第 3 秒末的间隔中，

$$\langle v\rangle_{2\to 3} = \frac{44.1-19.6}{3-2} = 25.4\ 米/秒$$

对于不同的时间间隔。自由落体的平均速度不相同。这种运动称为变速运动。从上面所给出的三个平均速度可知，自由落体在第 1 秒末到第 3 秒末的两秒钟时间间隔中并非匀速，它在前一秒钟 (即第 1 秒末到第 2 秒末) 平均速度较小，在后一秒钟 (即第 2 秒末到第 3 秒末) 平均速度较大。从这一点上可以充分反映出平均速度往往不足以描写变速运动的细致情况。这是平均速度概念的弱点。求平均速度的时间间隔取得越大，它对快慢的描述就越粗略；反之，时间间隔越小，对快慢的描述也就越精确。在上例中，

虽然取 1 秒的时间间隔，比取 2 秒的时间间隔要好一些，但是在一秒钟的时间间隔内，自由落体仍然不是匀速的。这种情况迫使我们把计算平均速度的时间间隔取得尽可能地小。

为了便于进一步讨论，我们将式1.6.1 中的 t_2 表示成 $t_2 = t_1 + \Delta t$，这个 Δt 就是求平均速度所选用的时间间隔。现在来求从第 1 秒末到第 $1+\Delta t$ 秒末的间隔中，自由落体的平均速度。利用 $x = 4.9t^2$ 得到

$$\begin{aligned}\langle v\rangle_{1\to 1+\Delta t} &= \frac{x(1+\Delta t) - x(1)}{1+\Delta t - 1} \\ &= \frac{4.9\times(1+\Delta t)^2 - 4.9\times 1^2}{\Delta t} \\ &= (9.8 + 4.9\Delta t)\ \text{米/秒}\end{aligned}$$

此式再次表明，从第 1 秒末开始取不同的时间间隔 Δt，所得的平均速度是不相同的。既然 Δt 越小描述得越精确，我们取 Δt 为无限小，或者相当于 $\Delta t \to 0$ 的极限情况，这时平均速度变成为:

$$\lim_{\Delta t\to 0}(9.8 + 4.9\Delta t) = 9.8\ \text{米/秒}$$

这个 9.8 米/秒的物理意义是自由落体在第 1 秒末的一个无限小时间间隔中的平均速度，我们称这个值为自由落体在第 1 秒末的瞬时速度。瞬时速度与平均速度这两个概念的重要区别在于：平均速度总是与一段有限的时间间隔相联系，它是描述一段运动过程的物理量；相反，瞬时速度与一个时刻相联系，它是描述运动的瞬时性质的物理量。有了瞬时速度这个概念，使我们对运动的认识大为深化。

用类似的手续不难求出自由落体运动在任何时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，只要将上述的 1 及 $1+\Delta t$ 分别代之以 t 及 $t+\Delta t$，并取于 $\Delta t \to 0$ 的极限值就可以了。故有

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9 \times (t+\Delta t)^2 - 4.9 \times t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (9.8t + 4.9\Delta t) \\ &= 9.8t \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

此式给出了自由落体在每个时刻的瞬时速度。根据这个结果，我们再强调一遍，自由落体的运动快慢是时刻变化着的。你用平均速度来描写它，无论 Δt 取如何小的有限值，即使小到 Δt=0.001 秒，依然不够精确，因为在这 0.001 秒中质点依然不是匀速运动的。只有 Δt 趋于无限小，给出了每个时刻 t 的瞬时速度，了解了质点运动在每一瞬时的快慢，才算最精确地反映了质点运动的快慢。

对于任何直线运动，它的瞬时速度都可以用类似方式来确定:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

根据微积分学的知识，该极限就是轨迹函数 $x(t)$ 对时间 t 的一阶导数。即

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

其中，$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$，是在 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔中质点位置坐标的增量。以后我们提到的速度，一般都指瞬时速度。

我们看到，瞬时速度是利用数学上的微分概念来描写的。其实，在历史上，正是由于牛顿在处理这类基本力学问题时需要一种适当的数学工具，从而促使他创建了微积分学。这不仅使物理概念得以准确地表述，而且也大大丰富了数学本身。这是牛顿的

巨大功绩之一。由此，我们再次看到，一个物理对象，用什么数学语言描写并不是一件自然的事情，而是物理研究的一个核心课题。

当质点作直线运动时，我们可以设法求出它的位置时间曲线(图1.10)。从图中可以看出，平均速度在数值上等于各段割线的斜率，瞬时速度在数值上等于各点的切线的斜率。所以在求出位置时间曲线后，就可以从 $x(t)$ 曲线上求出各点的速度。

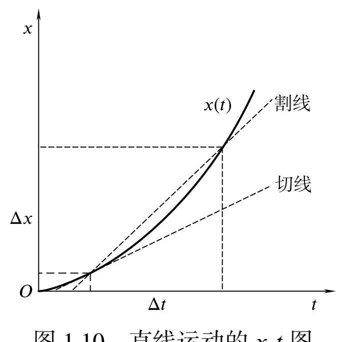


图 1.10　直线运动的 x-t 图

从平均速度的定义（1.6.1）式可以知道，$\langle v\rangle$ 可以有正值，也可以有负值。当 $x(t+\Delta t) < x(t)$ 时，$\langle v\rangle$ 为负。这种情况相当于质点在 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中，总的说来是向负 x 方向运动的。所以，$\langle v\rangle$ 的正负恰恰反映了运动的方向。通常称平均速度的绝对值 $|\langle v\rangle|$ 为平均速率。类似地，瞬时速度的绝对值 $|\mathbf{v}(t)|$ 被称为速率，而瞬时速度的正负，就表示质点在时刻 t 的运动方向。速度 $\mathbf{v}$ 不仅描述了运动的快慢，而且描述了运动方向。

1.7　曲线运动的速度

我们现在来推广上节关于直线运动的速度的概念。按图 1.11，质点作曲线运动，在时刻 t_1，质点位置矢量为 $\mathbf{r}\left(t_1\right)$，在时刻 t_2，位置矢量为 $\mathbf{r}\left(t_2\right)$，则定义在 t_1 到 t_1 间隔中质点 A 的平均速度为

$$\langle\mathbf{v}\rangle_{t_1\to t_2} = \frac{\mathbf{r}\left(t_2\right)-\mathbf{r}\left(t_1\right)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.7.1}$$

将其与式(1.6.1) 对比可见。只是将其中的 $x(t)$ 换成了相应的 $\mathbf{r}(t)$。在(1.7.1) 中，$\Delta t = t_2 - t_1$，$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$，后者是 t_1 到 t_2 间隔中质点位置矢量的改变量，称为位移矢量。这个平均速度的定义表明，平均速度是矢量。根据矢量运算规则，式(1.7.1) 所定义的 $\langle \mathbf{v} \rangle t_1 - t_2$ 是在1到2的方向 (图1.11)。另一方面，由图1.11 很清楚知道，在 t_1 到 t_2 时间内质点 A 的运动方向并非总是沿着 1 到 2 的方向的，而是先从 1 向 3 方向运动，然后从 3 向 2 方向运动，这些运动方向并不平行于 1 到 2 的方向。所以平均速度所指的方向，只是质点 A 真实运动方向的平均。也就是说，平均速度不但对于运动快慢的描写是粗略的，而且对于运动方向的描写也是粗略的。

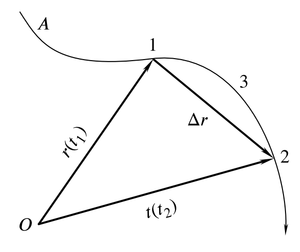


图 1.11 曲线运动的速度

对式(1.7.1) 取 $\Delta t \to 0$ 的极限，就得到瞬时速度的定义。

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{1.7.2}$$

它是直线运动情况的式(1.6.3)的推广。如果利用式(1.4.1)，则有

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} \tag{1.7.3}$$

所以三个坐标函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 对时间 t 的导数分别是速度矢量在三个坐标轴方向的分量:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ v_y = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\ v_z = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.7.4}$$

由图1.12，当 Δt 减小时，矢量 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ 逐渐向 $\mathbf{r}(t)$ 靠拢，矢量 $\Delta\mathbf{r}$ 相继从 1，2 变到 1，3，变到 1，4……，在 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下，$\Delta\mathbf{r}$ 的方向趋于轨迹曲线在点 1 的切线方向。这样，我们就得到一个结论：瞬时速度 $\mathbf{v}(t)$ 的方向，就是轨迹曲线在相应点的切线方向。瞬时速度的大小 v，按定义(1.7.2)应为

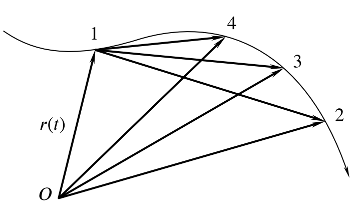


图 1.12 曲线运动的瞬时速度

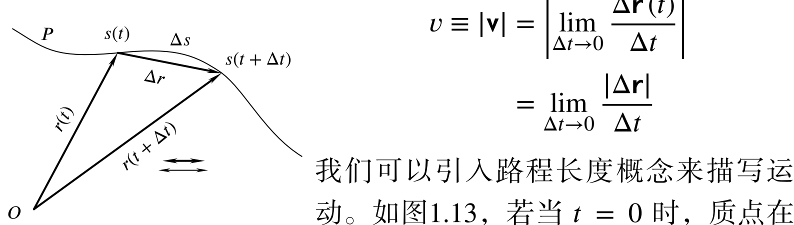


图 1.13 用路程长度 $s(t)$ 来描写运动

$$v \equiv |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}(t)}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

我们可以引入路程长度概念来描写运动。如图1.13，若当 $t=0$ 时，质点在轨迹上的 P 处。则可定义函数 $s(t)$，它表示质点到 t 时刻所走过的路程的长度。显然，$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ 表示在 t 到 $t+\Delta t$ 中质点所走过的路程的长度。一般 Δs 和 $|\Delta\mathbf{r}|$ 并不相等，但在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况下，二者是一样的，故速度大小也可表示为

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.7.5}$$

1.8 加 速 度

为了描写速度的变化，我们再引入一个物理量，即所谓加速度。对于直线运动，若当 t 时刻，质点速度为 $v(t)$，当 $t+\Delta t$ 时刻，为 $v(t+\Delta t)$，则我们定义从 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中质点的平均加速度为

$$\langle a\rangle_{t\to t+\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \tag{1.8.1}$$

它的定义是质点在单位时间中速度的平均变化，单位是 米/秒^2。

利用式(1.6.2)，可以计算自由落体在 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中的平均加速度：

$$\begin{aligned}\langle a\rangle_{t\to t+\Delta t}&=\frac{9.8(t+\Delta t)-9.8t}{\Delta t}\\&=9.8\text{米/秒}^2\end{aligned}$$

这个结果中不含 t 和 Δt，也就是说，对任何一段时间间隔，自由落体的平均加速度都是一样的。这种加速度不随时间变化的运动，称为匀加速运动。自由落体运动是一个典型的匀加速运动。无论用何种材料作成的物体，它的自由落体加速度总等于 9.8 米/秒^2。称此加速度为重力加速度，用 g 表示。

精确测量表明，在地球各处，重力加速度 g 并不都一样，一

表 1.6 地球上不同地点的 g 值

地　　点	纬　度	g (米/秒^2)
北　极	北纬 90°	9.832 45
戈拉雅克 (格陵兰)	北纬 70°	9.8253
雷克雅未克 (冰岛)	北纬 64°	9.8227
列宁格勒	北纬 60°	9.8193
巴　黎	北纬 49°	9.8094
北　京	北纬 40°	9.8012
汉　口	北纬 30°	9.7936
广　州	北纬 23°	9.7883
蒙罗维亚 (利比里亚)	北纬 6°	9.7816
雅加达	南纬 6°	9.7813
墨尔本	南纬 38°	9.7999

般说来，在低纬度处 g 值较小；在高纬度处，g 值较大 (表1.6)。

类似于平均速度不足以细致地描写非匀速运动一样，平均加速度也不足以细致地描写非匀加速运动。对于非匀加速运动，必须引入瞬时加速度来描述它的速度变化。加速度也是一个描述运动的瞬时性质的物理量。瞬时加速度定义为:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

它的意义是质点在时刻 t 的无限小时间间隔中的平均加速度。以后我们谈到加速度，一般都是指瞬时加速度。

对于一般的曲线运动，可以给出相应的平均加速度及瞬时加速度为：

$$\langle \mathbf{a} \rangle_{t \to t+\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{1.8.2}$$

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.8.3}$$

在曲线运动情况下，速度方向是变化的。$v(t)$，$v(t+\Delta t)$ 及 Δv，一般如图1.14 所示。由于 a 平行于 Δv, 所以平均加速度的方向一般与速度方向并不相同。瞬时加速度也类似。当加速度方向平行于速度时，表示速度方向没有变化，但速率增加。当二者反平行

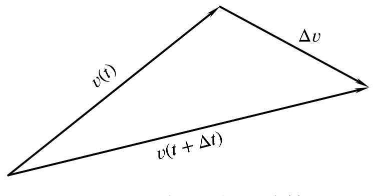


图 1.14　加速度的计算

时，表示速度方向不变，而速率减少。当加速度既不平行也不反平行于速度时，表示速度方向也在变化。

利用式(1.7.3)，加速度矢量的分量可以表示为：

$$\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{j}+\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{k} \tag{1.8.4}$$

加速度的三个坐标分量为：

$$a_x(t)=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2},\ a_y(t)=\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2},\ a_z(t)=\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.8.5}$$

$\mathbf{r}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{a}$ 是描写运动的物理量。我们希望用数目比较少的物理量来描写运动。什么叫比较少？意思是这些物理量之间应是相互独立的。所谓相互独立。是说其中任一个量不能由其他的量加以确定。用 $\mathbf{r}$，$\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{a}$ 三个量来描写运动是必要的，因为它们是相互独立的。例如，在某一时刻，知道了质点的位置 $\mathbf{r}$，并不能知道它的速度 $\mathbf{v}$，知道了 $\mathbf{v}$，也并不能知道 $\mathbf{a}$，反之亦然。人们认识到这一点，也并不容易。在伽利略之前，并没有加速度概念。当时，没有人认识到加速度与速度是相互独立的，所以没有认识到需要用加速度来描写运动。

我们已讨论了位置矢量、速度和加速度。从运动学本身来考虑，没有足够的理由说明，为什么我们应当到此为止，而不去讨论加加速度、加加加速度……。当然，我们可以定义并计算加加速度，即加速度的变化率，但一般说这并不代表任何具有基本物理价值的东西。其中的原因在动力学，学过动力学后，我们将看到，对力学的讨论几乎全部是基于位置矢量，速度和加速度这三个量。

下面我们介绍运动的独立性这一重要概念。由式(1.5.2)、(1.7.3)、(1.8.5)可以看到，描写一个复杂的曲线运动时，X 方向的坐标、速度、加速度与其他方向的坐标，速度、加速度无关。Y 方向和 Z 方向也有这种性质，即三个方向相互无关，这种性质被称为运动的独立性。因此，一个复杂的曲线运动，可看成在 X，Y，Z 三

个方向上的直线运动，这三个运动同时进行，我们可以对每一个运动进行单独的分析，好象另外两个自由度上的运动是根本不存在一样，这样就使问题变得简单。

【例 1】 已知一个质点作直线运动。观察到它的位置与时间的变化如表1.7所示。用这些数据求出各时间间隔的平均速度 v 及平均加速度 a，并写出运动方程式。

表 1.7

时　间（秒）	0	1	2	3	4	5	6	7	8
与参考点的距离（米）	3	4	9	18	31	48	69	94	123

解 因为时间间隔都是 1 秒，即 $\Delta t = 1$ 秒。所以从数值上有

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \Delta s$$

$$a = \frac{(v_2 - v_1)}{\Delta t} = v_2 - v_1 = (\Delta s_2) - (\Delta s_1)$$

将结果列于表1.8中。

表 1.8

时　间 (秒)	0		1		2		3		4		5		6		7		8
与参考点的距离 s (米)	3		4		9		18		31		48		69		94		123
各秒内的位置变化 Δs (米)		1		5		9		13		17		21		25		29	
各秒内的平均速度 v (米/秒)		1		5		9		13		17		21		25		29	
各秒内的平均加速度 a (米/秒^2)			4		4		4		4		4		4		4		

既然平均加速度 a 是一个常数，所以这个直线运动是匀加速直线运动，加速度是 $a = 4$ 米/秒 ^{2}. 对于匀加速直线运动，一般的运动方程是:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

用已知数据代入，便可求出 s_0，v_0，a。

当 $t = 0$ 时，$s = s_0 = 3$，所以 $s_0 = 3$；

当 $t = 1$ 时，$4 = 3 + v_0 + \frac{1}{2}a$，即 $v_0 + \frac{1}{2}a = 1$；

当 $t = 2$ 时，$9 = 3 + 2v_0 + 2a$，即 $v_0 + a = 3$。

解上述两方程可得 $a = 4$，$v_0 = -1$。所以运动方程式为:

$$s = 3 - t + 2t^2$$

【例 2】 在阴极射线管中，一束电子以 10^9 厘米/秒的速度水平地射入平行板之间的均匀电场，电场使电子获得 10^{17} 厘米/秒^2 的向下的匀加速度。已知平行板长为 2 厘米。求:

(1) 电子束通过平行板时的竖直方向位移 d 和经历的时间 t；

(2) 电子束离开平行板时的速度大小和方向；

(3) 在平行板内和离开板后电子束的轨迹。

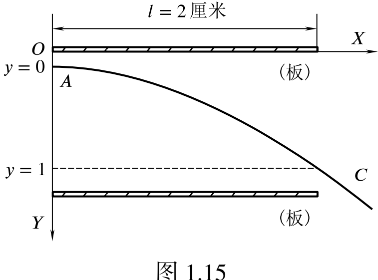


图 1.15

解 选择如图1.15 所示的坐标系。

由于运动的独立性，在 x 方向是惯性运动，速度为 $v_0 = 10^9$ 厘米/秒；在 y 方向是匀加速运动，加速度为 $a = 10^{17}$厘米/秒^2(因为 a 远远大于重力加速度 g，所以不考虑重力的影响)，且初速为零，故有:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}at^2 + y_0 \end{cases}$$

电子通过平行板的时间为：

$$t_0 = \frac{l}{v_0} = \frac{2}{10^9} = 2 \times 10^{-9}\text{秒}$$

电子通过平行板时，在竖直方向的位移为：

$$\begin{aligned} d &= y_1 - y_0 \\ &= \frac{1}{2}at_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{17} \times 4 \times 10^{-18} \\ &= 0.2\text{厘米} \end{aligned}$$

电子在板中时，因为

$$v_x = v_0 \qquad v_y = at$$

所以 $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + a^2t^2}$$

速度与水平轴的夹角为：

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x} = \text{arctg}\,\frac{at}{v_0}$$

它随时间而变。在离开板时，$t = t_0$，有

$$v \approx 1.02 \times 10^9\text{厘米/秒}$$

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{at_0}{v_0} = \text{arctg}\,\frac{1}{5} = 11°19'$$

在板内运动方程是：

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}at^2 + y_0 \end{cases}$$

消去 t 则得 $y = \frac{a}{2v_0^2}x^2 + y_0$，轨迹是抛物线。

离开平行板后。电子以与水平轴成 $11°19'$ 的夹角的速度 $v \approx 1.02 \times 10^8$ 厘米/秒作直线运动。

【例 3】 设在地面附近，重力加速度是个常数 g，且垂直指向地面。物体的初速度为 v_0。与水平方向成 θ 角。试讨论抛体运动轨迹。

讨论 我们在 v 和铅垂线所决定的平面上来研究。按图1.16 中的坐标，可把运动分解为 x 方向与 y 方向，并分别处理。x 方向是惯性运动 $v_x = v_0 \cos\theta$，所以有

$$x = \left(v_0 \cos\theta\right) t \tag{1}$$

y 方向就是上抛运动，初速度为 $v_0 \sin\theta$。故有

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt \tag{2}$$

$$y = \left(v_0 \sin\theta\right) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{3}$$

由(1)，(3)消去 t 便得抛物线形的轨迹：

$$y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} \tag{4}$$

物体达到最高点时，$v_y = 0$，由此便得在最高点处的时间为:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

相应的最大高度为，

$$H = v_0 \sin\theta \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v^2 \sin^2\theta}{2g}$$

物体落回到与出发点同样高度时，有：

$$y = 0 = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

即 $$t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

这时的水平距离 R 叫做射程：

$$R = \left(v_0 \cos\theta\right) t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

因为当 $\theta = 45°$ 时，$\sin 2\theta$ 取最大值。所以，以同一速率 v_0 抛射物体，当 $\theta = 45°$ 时，射程最远。因为 $\theta = 90°$ 时，$\sin\theta$ 最大，所以，只有当 $\theta = 90°$ 时，即竖直上抛，H 才能达到最大，其值为：

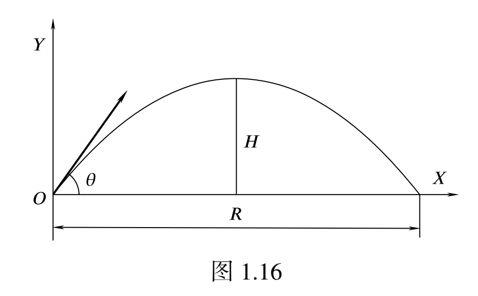


图 1.16

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

这个题讨论的是理想情况，在实际情况中存在着空气阻力，抛物速度愈大，阻力也愈大。空气阻力随着抛物速度的增加而逐渐增加，在某一速度上将等于重力，这时物体将匀速下降。因而实际上抛体的轨迹并不是理想的抛物线。

1.9 圆周运动和角速度

现在来讨论一种最简单的曲线运动——圆周运动。即轨迹是个圆。如果选择圆心作为坐标原点，质点的位置就可用位置矢量 $\mathbf{r}$ 与某一选定的方向 (例如 X 轴) 之间的夹角 φ(图1.17) 来描述，因为 φ 确定之后，质点的位置就完全确定了。因而可用角 φ 与 t 的关系 $\varphi(t)$ 来代替函数 $\mathbf{r}(t)$。

我们知道，对于直线运动，用一个坐标 $x(t)$ 就可以描写。同

样，对于圆周运动，也是只要一个坐标 $\varphi(t)$ 来描写就够了。在这个意义上，两者是一样的。而一般的平面曲线运动，需要两个坐标来描写；一般的空间曲线运动，则需要三个坐标来描写。我们按描写运动所需坐标的个数，把运动分为一维运动、二维运动、三维运动等等。直线运动和圆周运动都是一维运动。

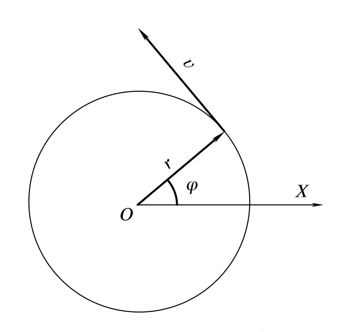


图 1.17　圆周运动

按照1.7 节的讨论，速度的方向为轨迹上相应点的切线方向，圆的切线总与半径相垂直，所以圆周运动的速度 **v** 总与位置矢量 **r** 相垂直。现在来求速度的大小。由图1.18，在 t 时刻，质点位于 $\varphi(t)$；当 $t+\Delta t$ 时，位于 $\varphi(t+\Delta t)$，所以在 Δt 间隔中质点运动的路程为：

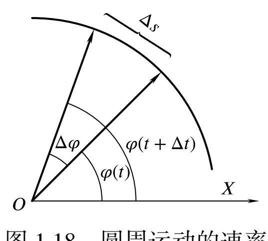


图 1.18　圆周运动的速率

$$\Delta s = r|\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)|$$
$$= r|\Delta\varphi|$$

将此式代入式(1.7.5)，就得到圆周运动的速率

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r|\Delta\varphi|}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} \tag{1.9.1}$$

现在定义一个新的量，它是

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} \tag{1.9.2}$$

这种形式的公式我们已经多次遇到了。$|\Delta\varphi|/\Delta t$ 是在 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中，质点的单位时间的角位置的平均变化。当取 $\Delta t\to 0$ 的极限时，这个平均变化率过渡为瞬时变化率。因此，我们称 ω 为角

速度，确切地说，应称为角速率。它的单位是弧度/秒。利用角速率 φ，式(1.9.1)可以写成

$$v = r\omega \tag{1.9.3}$$

速度本质上是一个矢量，有大小和方向两方面。上述角速度定义只反映了大小，为反映方向，我们需作些补充。

现在定义一个矢量 $\boldsymbol{\omega}$，它的大小等于式(1.9.1)中的 ω，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向按图1.19所示的方法给定。

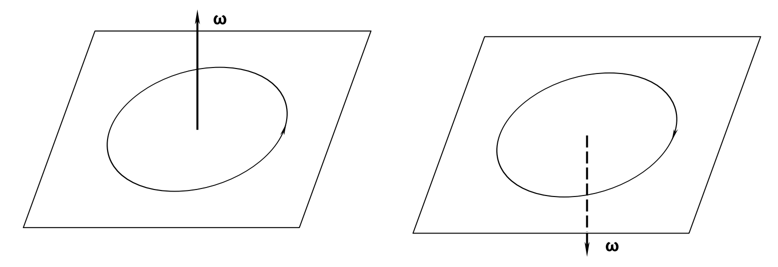


图 1.19 角速度的方向

当我们从 $\boldsymbol{\omega}$ 指向的方向观察质点的运动时，质点总是沿逆时钟方向转动。这个规定 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向的方法也可以用一个正扣螺旋来说明，当螺钉按质点运动方向旋转时，螺钉的运动方向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向。

这样定义的 $\boldsymbol{\omega}$，称为角速度矢量。利用这个矢量。可以把质点的速度矢量 $\mathbf{v}$ 表示成

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.9.4}$$

由图1.20，因为 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\mathbf{r}$ 垂直，所以 $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r = v$，而且 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 的方向与 $\mathbf{v}$ 的方向一致。故式(1.9.4) 比(1.9.3)更具有一般性，它不仅表达了三者的大小关系，也反映了三者间的方向关系。不仅如此，若取通过圆心且垂直于圆所在平面的直线上任一点为原点(图1.21) 来描写圆周运动，式(1.9.4)仍成立，但式(1.9.3)就不对

了。读者可以自己证明。

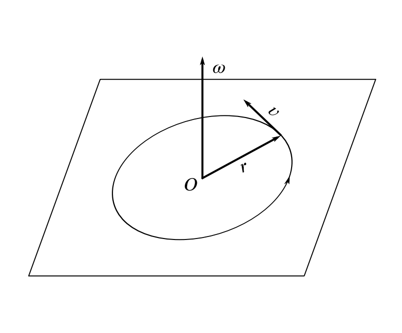


图 1.20　圆周运动中 **ω** 与 **v** 的关系

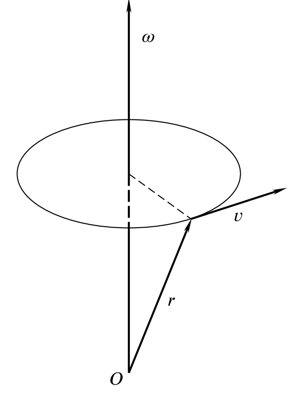


图 1.21　原点不在圆心的情况

1.10　匀速圆周运动

一般情况角速率 ω 是随 t 变化的，这时质点的速度的大小也随 t 变化。以下讨论 ω 不随 t 变化的特殊情况，即匀速圆周运动。由式(1.9.3)，这时质点的速率也不变化。质点绕圆周一圈走过的路程是 $2\pi r$。如果走一圈所用时间为 T，则质点的速率是

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{1.10.1}$$

T 为周期，比较式(1.10.1)、(1.9.3)，得到：

$$\omega = \frac{2\pi}{T},\ T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.10.2}$$

这也就是说，周期 T 等于质点转过 2π 角度所需要的时间。

对于匀速圆周运动，**v** 的大小不变，而 **v** 的方向时时在变，因而它的加速度并不为零。由于速度方向总是垂直于矢量 **r** 的，所以在 t 到 $t+\Delta t$ 间隔中，倘使 **r** 转过角度 $\Delta\varphi$，则 **v** 也就转过了

$\Delta\varphi$。由于 $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{v}(t+\Delta t)| = v$，由图1.22 的等腰三角形，得

$$|\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)| = 2v\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 2v\frac{\Delta\varphi}{2} = v\Delta\varphi$$

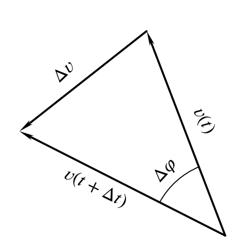


图 1.22　匀速圆周运动的加速度

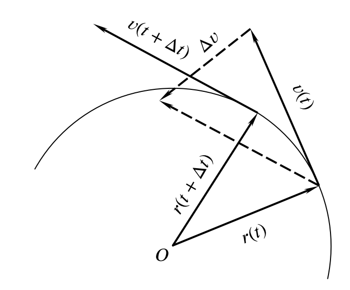


图 1.23　加速度的方向

将此式代入式(1.8.3)，得

$$\begin{aligned} a \equiv |\mathbf{a}| &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)|}{\Delta t} \\ &= v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t} = v\omega = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

上式推导中利用了式(1.9.2)，(1.9.3)。因为 v 或 ω 都不随 t 变，所以匀速圆周运动的加速度的大小也不随 t 变，但它的方向是时时变化的。根据图1.23，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) = \Delta\mathbf{v}$ 的方向趋于与 $\mathbf{v}(t)$ 相垂直，并指向圆心。这样，匀速圆周运动的加速度的大小由式(1.10.3)给出，而其方向总是指向圆心的。根据这种方向上的特点，称这个加速度为向心加速度。

速度、角速度和加速度都是矢量，我们可把式(1.10.3)扩充为矢量关系式:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \tag{1.10.4}$$

它的正确性也留给读者自己去证明。

1.11　运动学里的反问题

以上各节讨论的问题，都是当已知运动的轨迹函数 $\mathbf{r}(t)$ 后，求速度和加速度。在运动学中还会遇到一种相反的问题：已知质点在各时刻的速度 $\mathbf{v}(t)$，求它的轨迹函数 $\mathbf{r}(t)$；已知加速度 $\mathbf{a}(t)$，求它的 $\mathbf{v}(t)$。以前各节讨论的问题多与微分运算相联系，而这些反问题，却是与积分运算相联系的。

仍然先讨论直线运动。如果已知直线运动的质点的速度为 $v(t)$，并已知在 $t = 0$ 时，质点在 $x(0)$(称为初始位置)，求在时刻 t 的质点的坐标 $x(t)$。

我们把零到 t 这段时间间隔，分成许多小段，即 $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots$，而且 $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots = t$，如果所有各小段都相当小，则在每个间隔中速度变化不太大，在 Δt_i 中速度近似为 $v\left(t_i\right)$。这样，在每个时间间隔中质点的坐标变化分别近似为：

$$\begin{aligned}
&\Delta x_1 \approx v\left(t_1\right) \Delta t_1 \\
&\Delta x_2 \approx v\left(t_2\right) \Delta t_2 \\
&\cdots \cdots
\end{aligned}$$

因而，质点在 0 到 t 间隔中坐标的总变化 $x(t) - x(0)$ 就应当等于这许多小变化的总和，即

$$\begin{aligned}
x(t) - x(0) &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots \\
&\approx \sum_i v\left(t_i\right) \Delta t_i
\end{aligned} \tag{1.11.1}$$

各时间间隔 Δt_i 取得越小，计算结果就越准确，当所有 $\Delta t_i \to 0$ 时，就得到质点位置变化的精确值：

$$x(t) = x(0) + \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v\left(t_i\right) \Delta t_i \tag{1.11.2}$$

上式取极限的项，与积分的定义是一样的。所以它可写成

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\ \mathrm{d}t \tag{1.11.3}$$

这就是我们所要求的答案。

现在说明式(1.11.1)或(1.11.2)中求和运算的几何意义。我们在图1.24 中画出了速度 v 对时间 t 的关系曲线。各时间间隔 $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots$，相应于横坐标上的各小段，各 $v(t_1), v(t_2), \cdots$，相应于各小段中 v 的近似值。因而 $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots$，在数值上就等于相应的小长方形的面积。故对所有 Δx_i 求和，在各小段 Δx_i 都趋于无限小的情况下，在数值上就等于零到 t 间横轴之上与曲线 v 之下所围的面积。

利用这种几何性质，对一些简单情况，计算式(1.11.3)中的积分是很容易的。下面举两个例子。

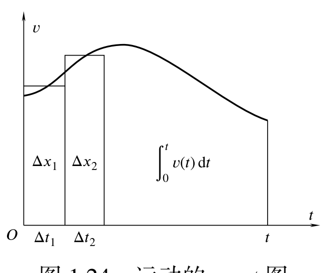


图 1.24　运动的 $v-t$ 图

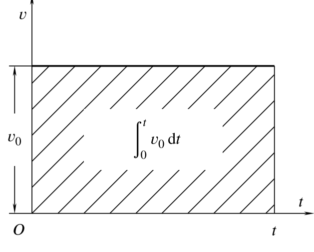


图 1.25　匀速运动的 $v-t$ 图

【例 1】　匀速运动。

如果质点的速度是常数 v_0，它的 $v-t$ 图就如图1.25 所示。由 0 到 t 的横轴与曲线 v 围成一个长方形，它的面积是 $v_0 t$，将之代入式(1.11.3)，即得轨迹函数为:

$$x(t) = x(0) + v_0 t \tag{1.11.4}$$

【例 2】　匀加速运动。

设质点的速度与时间成正比，$v = at$，在图1.26 中画出这个关系。零到 t 的横轴与曲线 v 围成一个直角三角形，它的面积是

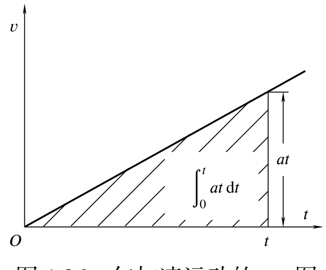


图 1.26　匀加速运动的 v-t 图

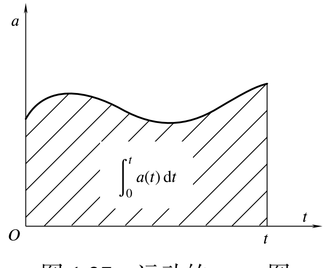


图 1.27　运动的 $a-t$ 图

$\dfrac{1}{2}at^2$，代入式(1.11.3)，就得到轨迹函数为：

$$x(t)=x(0)+\frac{1}{2}at^2 \tag{1.11.4$'$}$$

已知加速度 $a(t)$，求速度 $v(t)$ 的方法，同样可以按上面的方法求得，将 0 到 t 的时间间隔分成小段 $\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots$，每个小段中加速度分别近似为 $a\left(t_1\right),a\left(t_2\right),\cdots$，因而在每个小段中，速度的变化相应为 $\Delta v_1\approx a\left(t_1\right)\Delta t_1,\Delta v_2\approx a\left(t_2\right)\Delta t_2,\cdots$，在 0 到 t 间隔中速度总的变化等于所有变化之和，即

$$\begin{aligned} v(t)-v(0)&=\Delta v_1+\Delta v_2+\cdots \\ &\approx\sum_i a\left(t_i\right)\Delta t_i \end{aligned} \tag{1.11.5}$$

其中 $v(0)$ 是 $t=0$ 时质点的速度，称为初速度。同样，取所有 $\Delta t_i\to 0$ 的极限，就得到速度变化的精确表达式为，

$$\begin{aligned} v(t)&=v(0)+\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_i a\left(t_i\right)\Delta t_i \\ &=v(0)+\int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.11.6}$$

上式中积分的几何意义是 $a-t$ 图中由 0 到 t 的横轴与 a 曲线之间所围的面积 (图1.27)。

对于曲线运动的情况，式(1.11.3)、(1.11.6)分别推广成

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0)+\int_0^t \mathbf{v}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \mathbf{r}(0)+\left(\int_0^t v_x(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^t v_y(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{j} \\ &\quad +\left(\int_0^t v_z(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{1.11.7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0)+\int_0^t \mathbf{a}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \mathbf{v}(0)+\left(\int_0^t a_x(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^t a_y(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{j} \\ &\quad +\left(\int_0^t a_z(t)\ \mathrm{d}t\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{1.11.8}$$

其中 $\mathbf{r}(0)$ 及 $\mathbf{v}(0)$ 分别为初始时刻质点的位置矢量及速度矢量。具体使用式(1.11.7)及(1.11.8)时，可以把它们分解成分量的关系来计算。式(1.11.7)等价于下列三式。

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0)+\int_0^t v_x(t)\ \mathrm{d}t \\ y(t) &= y(0)+\int_0^t v_y(t)\ \mathrm{d}t \\ z(t) &= z(0)+\int_0^t v_z(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.11.9}$$

而式(1.11.8)等价于下列三式。

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_x(0)+\int_0^t a_x(t)\ \mathrm{d}t \\ v_y(t) &= v_y(0)+\int_0^t a_y(t)\ \mathrm{d}t \\ v_z(t) &= v_z(0)+\int_0^t a_z(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.11.10}$$

这些积分中没有出现矢量，就可以按一一般方法计算，譬如上述的面积方法就是一种可行的方法.

研究运动有两种次序。一种是先研究轨迹，已知轨迹函数为 $\mathbf{r}(t)$，再来推求速度 $\mathbf{v}(t)$，加速度 $\mathbf{a}(t)$。就人类的认识过程来说，的确是先看到轨迹的形状，然后有了运动快慢的概念，最后认识到速度的变化，即加速度。另一种次序是：先知道加速度，然后再求速度及轨迹。在物理学中，从力学的规律来看。往往是如此。

前一种次序，看上去非常自然，是人类研究机械运动所走的一条路。在牛顿之前，亚里士多德认为轨迹是最基本的，速度则次之。这种方法的特点是先研究运动的大的整体方面，然后再涉及局部细节。

后一种次序，是牛顿创建的方法。也是现代物理学一个基本的方法。牛顿认为，不要先探讨物体运动的整体方面。而是先研究运动的瞬时情况，瞬时情况更为基本。弄清瞬时情况之后再来讨论整体运动。也可以说，这种方法是先研究局部细节，然后再作积分，得到整体性质。至今在大多数情况下，物理学家仍采取牛顿的这种方法。

上述两种方法反映了两种不同的信念。一种认为整体的大的方面更简单些，因此，主张从大到小的研究顺序；另一种认为局部的单元过程更简单些，因此。主张从小到大的研究顺序。我们将在第五章说明，这两种“简单性”可能是分不开的。

思　考　题

1. 一个原则上不能进行直接或间接测量的物理量是否有意义？

2. 平均速率有两种意思，一是指平均速度矢量的大小，一是指物体运动路径总长度除以所用的总时间。这两种意思是否相同？

3. 质点作一维运动，如果加速度不是恒量，质点的平均速率

是否等于 $\frac{1}{2}$(初速 + 末速)?

4. 当物体的加速度恒定不变时，它的运动方向可否改变?

5. 质点的运动方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$。在计算它的速度和加速度的大小时，有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$，求得结果；有人先计算速度和加速度分量，再合成，所得结果为：

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

你认为哪一组结果正确?

6. 两千多年前，住在尼罗河口亚历山大城的埃拉托色尼，首估算出地球的半径。然而，真正沿着地球子午线用绳长及日晷对地球进行测量的，却是中国唐代高僧一行 (公元 683~727)。你知道高僧一行测量的原理，方法及计算结果吗?

7. 设想将一小球上抛。如不考虑空气阻力，试证明它返回原地时的速率等于开始的速率，并证明上升和下落所经过的时间相等。

8. 将一小球铅直地上抛，若考虑空气阻力，它上升和下降所经过的时间哪一个长?

9. 假设有两石块 m 和 M，其中 m 较轻，M 较重。按照亚里士多德的看法，在地面上 M 应该比 m 下落得快些。伽利略首先用思辨的方式指出亚里士多德的看法是自相矛盾的。伽利略说，设想将 m 与 M 系在一起，则构成物体 $(m+M)$，此物下落时，因为 m 有下落得较慢的趋势，所以，m 应该阻碍 M，使它下落得比 m 快些而又比 M 慢些；但是另一方面，物体 $(m+M)$ 比 M 还要

重，按照亚里士多德的看法，它应比 M 下落得更快。因此，导致矛盾。

你认为伽利略的推理是否正确?

10. 质点在空间的运动，一般是三维运动。忽略风的作用的抛体运动，为什么可以作为二维运动来处理?

习 题

1. 用芝诺时计算阿基里斯的速度 v_1' 和加速度 a_1'，并给出 x-t' 图。

2. 甲乙两列火车在同一水平直路上以相等的速率 (30 公里/时) 相向而行。当它们相隔 60 公里的时候，一只鸟以 60 公里/时的恒定速率离开甲车头向乙车头飞去，一当到达立即返回，如此来回往返不止。试求：

(1) 当两车头相遇时，鸟往返了多少次?

(2) 鸟共飞行了多少时间及距离?

(3) 我们定义一种特殊的“小鸟钟”：小鸟从一车头到另一车头为小鸟钟的时间测量单位 (即小鸟钟的一个“滴答”)。用小鸟钟记时的数值为 t'' 求 t'' 与一般时钟记时 t 之间的变换。

3. 一人从 O 点出发，向正东走 3.0 米，又向正北走 1.0 米，然后向东北走 2.0 米，试求合位移的大小及方向。

4. 一质点从 P 出发，向左以匀速率 1.0 厘米/秒沿半径为 $R = 1.0$ 米的圆周运动 (图1.28)。问：

(1) 当它走过 2/3 圆周时，位移是多少?走过的路程是多少?在这段时间内的平均速度是多少? 该点的瞬时速度是多少?

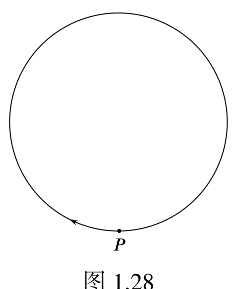


图 1.28

(2) 当它走过 1/2 圆周时，以上各值又如何？

5. 一物体作直线运动，它的位置由方程 $x=10t^2+6$ 决定，其中 x 的单位为厘米，t 的单位为秒，试计算：

(1) 在 3.00 ~ 3.10 秒、3.000 ~ 3.01 秒及 3.000 ~ 3.001 秒间隔内的平均速度；

(2) 在 $t=3.00$ 秒时的瞬时速度；

(3) 用微分方法求它的速度及加速度公式。

6. 有一质点沿 x 方向作直线运动，t 时刻的坐标为：

$$x=4.5t^2-2t^3$$

式中 x 的单位为米。t 的单位为秒。试求：

(1) 第 2 秒内的位移和平均速度；

(2) 第 1 秒末和第 2 秒末的瞬时速度；

(3) 第 2 秒内质点所走过路径的长度；

(4) 第 2 秒内的平均加速度以及第 0.5 秒末和第 1 秒末的瞬时加速度。

7. 一质点以恒定的径向速度 $r=4$ 米/秒在一平面中运动。它的角速度为常量，其大小为 $\omega=\dot{\theta}=2$ 弧度/秒。当质点距原点为 3 米时，它的速度的大小及加速度大小是多少？

8. 如图1.29 所示，向上抛一物体，测量物体上抛及下落经过水平线 A 的时差 T_A，以及上抛及下落经过水平线 B 的时差 T_B。试证明，若忽略空气阻力，重力加速度的大小可以表示为：

$$g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$$

式中 h 是 B 线与 A 线的高度差。

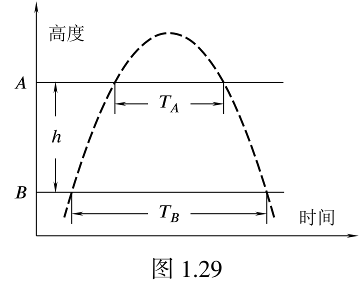


图 1.29

9. 天体物理常涉及大尺度的问题，为了方便起见，引进一些

实用的大的长度单位。一个天文单位 (AU) 等于从地球到太阳的平均距离；一个秒差距是一个天文单位所张之角为 1 秒的距离，即观测者从某一恒星看地球公转轨道半径所张的角度为 1 秒时，该恒星与太阳之间的距离。试求。

(1) 1 秒差距相当于多少米？多少天文单位？及多少光年？

(2) 以秒差距为单位，表示地球到太阳的距离。

10. 一物体从离地面的高度为 h 的地方，由静止开始自由下落，经过最后 196 米所用的时间是 4.0 秒钟。求物体下落过程所用的总时间及其高度。

11. 一枚从地面发射的火箭以 20 米/秒^2 的匀加速度竖直上升半分钟后，燃料用完，于是象一个自由质点一样运动。略去空气阻力，试求。

(1) 火箭达到的最大高度；

(2) 它从离开地面到再回地面所经过的总时间。

12. 把两个小物体从同一地点以同样初速率 $v_0 = 24.5$ 米/秒先后竖直上抛，设抛出两物体的时差为 $\Delta t = 0.500$ 秒，试问：

(1) 第二个物体抛出后，经过多少时间 t 才与第一个物体相遇？

(2) 如果 $\Delta t \geqslant \dfrac{2v_0}{g}$，讨论结果的物理意义。

13. 物体以初速 $v_0 = 20$ 米/秒被抛出，抛射仰角是60°，略去空气阻力，试问：

(1) 物体开始运动后的 1.5 秒末，运动方向与水平方向的夹角 α 是多少？2.5 秒末夹角 α 又为多少？

(2) 物体抛出后经过多少时间，运动方向才与水平成45° 角？这时物体的高度是多少？

(3) 在物体轨迹最高点处的曲率半径 R_1 有多大？

(4) 在物体落地点处，轨迹的曲率半径 R_2 有多大？

14. 高台下降滑雪在一平滑的山坡上进行。山坡与水平线成

恒定角度 α，滑雪运动员初速率为 v_0，并以与水平线成 θ 的仰角跳出 (1.30)。若不考虑空气阻力，试证明：

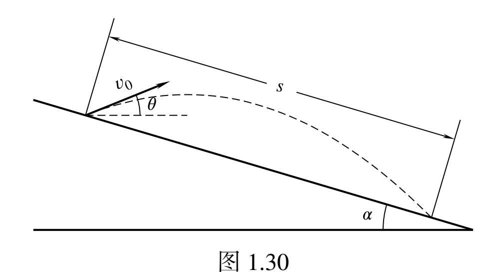


图 1.30

(1) 运动员落在斜坡上的距离为：

$$s = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

(2) 对于一定的 v_0 和 α 来说，s 在 $\theta = 45° - \frac{\alpha}{2}$ 时有最大值。其值为：

$$s_{\max} = \frac{v_0^2(1 + \sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

15.1977 年中国男子铁饼的最好记录是 54.28 米，1983 年提高到 60 米。这些记录都是在北京创造的，北京的重力加速度 g 为 980.12 厘米/秒^2。设投掷点比落地点高 1.5 米，略去空气阻力，问投掷时至少要用多大的初速度，才可达到上述距离？

16. 设若干个光滑斜面 $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ 有共同的底边 b 为 30 厘米。试问：

(1) 斜面与水平夹角 α 为多大时，才能使物体在该斜面上从顶端自由滑至底上正好需时为 $t = 0.4$ 秒？

(2) 多大的夹角 α，使下滑的时间最短？

17. 在空间某一点 O 以相同的速率向各方向同时把若干小球搬出去。试证明在略去空气阻力的情况下，任一时刻 t，所有小球都位于一个球面上，并求：

(1) 此球心的运动方程式；

(2) 球面距球心的距离。

18. 若抛射体的初速率为 v_0，抛射角为 θ，略去空气阻力。伽利略说："抛射角为 $45°+\delta$ 和 $45°-\delta\,(\delta<45°)$ 的两个抛射体初速率相同时，射程是相等的。"试证明他的话，并证明 $\theta=45°$ 时水平射程最大。

19. 一弹性球自由下落在一斜面上，与斜面发生完全弹性碰撞，下落高度 $h=20$ 厘米，斜面对水平的倾角 $\alpha=37°$(图1.31)。若不计空气阻力，它第二次碰到斜面的位置距原来的下落点多远？

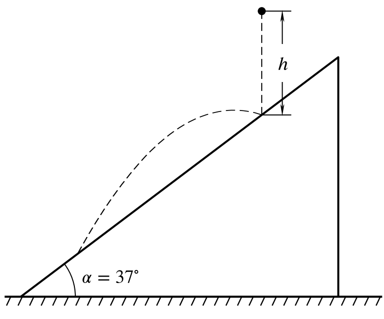


图 1.31

20. 用枪瞄准空中的靶，当子弹射出枪口时，靶同时自由下落。如果略去空气阻力。不论子弹速率多大，总会击中下落的靶，这个现象叫做百发百中，说明其中理由。

21. 一轰炸机高海面 10 公里，以 240 公里/小时的水平速度追击正前方一鱼雷艇，鱼雷艇的速度是 95 公里 / 小时，不计空气阻力，问飞机应在艇后多少距离投弹才能正好击中目标?

22. 一俯冲轰炸机沿与铅垂线成 37° 方向俯冲，在 800 米高度投弹，炸弹离开飞机 5.0 秒钟时着地。不计空气阻力，试问：

(1) 飞机的飞行速度是多少？

(2) 炸弹离开飞机后在水平方向前进多远？

(3) 炸弹着地时，速度的大小和方向？

23. 应以多大的水平速度 v 把一物体从高 h 处抛出，才能使它在水平方向的射程为 h 的 n 倍？

24. 飞机以 360 公里/小时的速度由东向西飞行。试回答：

(1) 在什么地理纬度上，飞机上的人可以看见太阳不动地停在空中？

(2) 若在极地附近沿纬线以圆轨道由东向西飞行，可以看见什么现象？

25. 一俯冲轰炸机以不变的速率 450 公里/小时俯冲后。急离俯冲线改为沿一铅垂平面内的圆形路线飞行。试问：要使飞机在圆的最低点的加速度不超过 $7g$，圆形路线的最小半径应是多少？

26. 车轮在地平面上作匀角速的纯滚动，轮行的速度为 $v_0 =$ 10 米/秒，轮的半径为 $r = 0.50$ 米，试求；

(1) 车轮边缘上一点 A 的角速度 ω；

(2)A 点的轨迹。

27. 一半径为 r 的小球沿两固定的等高平行导轨作纯滚动，两导轨间的距离为 d，如图1.32 所示。试问：

(1) 球心的速度与球的角速度的关系是怎样的？

(2) 小球面上一点 A 的轨迹如何？

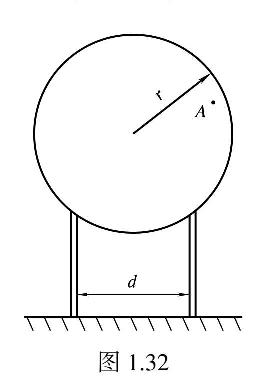


图 1.32

第二章

运动学中的相对性

2.1 相对和绝对

人对自然界认识的深化，常常是和弄清什么是相对的、什么是绝对的这类问题联系在一起的。

远古时期，无论在东方文明或西方文明中，都认为大地是平坦的，天在大地的上面。“天圆地方”就是这种观念的通俗表述。用现代语言来说，在这种观念中，“上”“下”这两个方向是绝对的。

到古希腊时期，毕达哥拉斯以及亚里士多德等先后开始主张大地是一个球体，即地球。中国的“浑天说”也有大体相似的观念。这是认识上的一次进步，因为它抛弃了当时的一种“习惯”的但却不正确的观念——“上”“下”是绝对的。

按照当时“习惯”的看法，如果大地是球形，那些居住在我们的对蹠点上的人不是早就“掉下”去了吗？可见，树立球形大地观需要克服一些不正确的成见所带来的阻力。因此，从相对与绝对角度来评价，可以说，地球观是把“上”和“下”这两个方向相对化了。我们看对照点的人在“下”，对照点的人看我们也是在“下”，亦即空间各个方向是等价的，没有一个方向具有特别的绝对优越的性质。

在亚里士多德的体系中，认为地球的球心是宇宙的中心。这个位置具有非常特殊的，绝对的意义。亚里士多德还认为，物体

运动的规律是力图达到自己的天然位置，地面附近物体的天然位置就是地球的中心，远处物体（如星体）则应环绕着地球的中心。这样，在支配物体运动的规律中，空间位置具有特别的作用，这种性质，可以叫做空间位置的绝对性。

以牛顿力学为起点的物理学，否定了亚里士多德体系中的空间位置的绝对性，认为任何的空间点都是平权的，地心在宇宙中并不占有特殊的地位。牛顿理论中的相对和绝对，又不同于亚里士多德了。

正因为相对和绝对这一问题的重要性，在这一章里，我们将系统地分析一下牛顿的运动学中的相对性，并且还将指出，牛顿体系中的相对绝对观也是有局限的，在某些条件下，就完全不适用了。

2.2 位置和轨迹的相对性

在运动学中，最基本的概念是位置。由图2.1 看到。对于质点 P，相对于参考系 K 而言，它的位置矢量是 $\mathbf{OP}$，即

$$\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

同时，相对于参考系 K' 来说，它的位置矢量是 $\mathbf{O'P}$，即

$$\mathbf{O'P} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$$

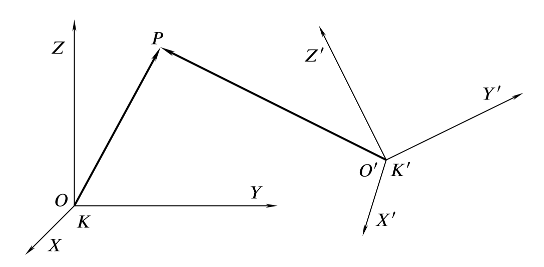


图 2.1　位置的相对性

可见同一质点的位置，对不同的参考系，可用不同的位置矢量来描写，这就是位置描写中的相对性。

从描写质点位置来说，选用参考系 K 或者 K'，是等价的。因为参考系 K 及 K' 一旦选定，它们之间的关系就完全确定了。我们知道了质点在参考系 K 中的位置坐标 (x, y, z)，就可求得在参考系 K' 中的位置坐标 (x, y, z)，反之亦然。用数学语言来说，即 x, y, z 与 x', y', z' 之间有确定的变换关系：

$$\begin{cases} x' = x'(x, y, z) \\ y' = y'(x, y, z) \\ z' = z'(x, y, z) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases} x = x\left(x', y', z'\right) \\ y = y\left(x', y', z'\right) \\ z = z\left(x', y', z'\right) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

式(2.2.1)、(2.2.2) 称为坐标变换。

现在我们介绍几种物理学中常用的坐标变换。

1. 坐标平移

如图2.2，参考系 K 及 K' 的 X 轴与 X' 轴重合，Y 轴与 Y' 轴平行，Z 轴与 Z' 轴平行，原点 P 的坐标在参考系 K 及 K' 中分别是 x, y, z 和 x', y', z'，显然，坐标变换是：

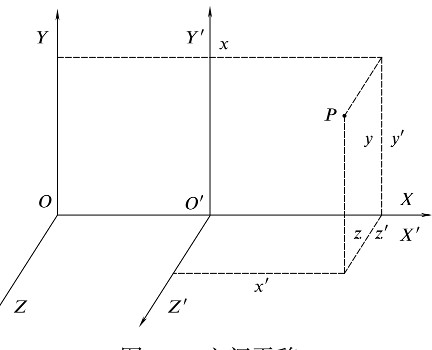


图 2.2　空间平移

$$\begin{cases} x = x' + d \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \tag{2.2.3}$$

2. 坐标转动

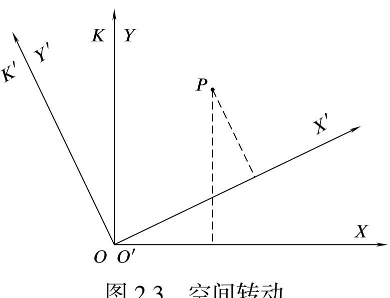


图 2.3　空间转动

讨论平面问题时，取如图2.3 的参考系 K 及 K'，它们的原点 O 与 O' 重合，参考系 K' 的轴相对于参考系 K 转动一个 θ 角。质点 P 的位置坐标在参考系 K, K' 中分别是 x, y, z 和 x', y', z'。不难求出，此时的坐标变换是：

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases} \tag{2.2.4}$$

或

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' = x \sin\theta - y \cos\theta \end{cases}$$

3. 空间反演

如图2.4，参考系 K 与 K' 的原点 O 与 O' 重合，Y 轴与 Y' 轴重合，而 X 轴与 X' 轴反向。这时，坐标变换是：

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y \end{cases} \tag{2.2.5}$$

图 2.4　空间反演

弄清了位置的相对性，关于轨迹的相对性也就不难理解了。

质点运动的轨迹，一般来说是一条空间曲线。对于一个质点的轨迹，相对于参考系 K，我们可用曲线方程

$$\begin{cases} f_1(x, y, x) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

来描写；也可相对于参考系 K'，用曲线方程

$$\begin{cases} f_1'\left(x',y',x'\right)=0 \\ f_2'\left(x',y',z'\right)=0 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

来描写。一般说来，函数形式 f_1, f_2 和式 f_1', f_2' 是不相同的，这就是轨迹的相对性。将式(2.2.2) 代入式(2.2.6)，就可由 f 求得 f'；将式(2.2.1) 代入式(2.2.7)，就可由 f' 求得 f。

作为示例，我们讨论两个平面运动。有两个质点。它们相对于参考系 K 的运动轨迹分别由下列曲线方程描写：

$$x-ky=0 \tag{2.2.8}$$

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2.2.9}$$

式(2.2.8) 表示一直线运动，式(2.2.9) 表示中心在原点，半径为 r 的一个圆周运动。

现在取另一参考系 K'，它仅相对于参考系 K 转了一个 θ 角。我们把式(2.2.4)代入式(2.2.8)，整理后得

$$x'(\cos\theta-k\sin\theta)-y'(\sin\theta+k\cos\theta)=0 \tag{2.2.10}$$

式(2.2.10) 就是在参考系 K' 中所看到的第一个质点的轨迹方程，它也是一条直线，但斜率与式(2.2.8)不同。

将式(2.2.4) 代入式(2.2.9)，得

$$x'^2+y'^2=r^2 \tag{2.2.11}$$

由式(2.2.11) 看到，第二个质点的轨迹相对于参考系 K'，也是中心在原点。半径为 r 的圆。

如果一种运动轨迹相对于两参考系形状相同。而且它与两坐标系的关系也一样，我们称这种特殊轨迹对于这一特定的坐标变换具有不变性。用数学语言来说，当参考系 K 变到 K' 时。若轨迹方程由

$$f(x,y,z)=0$$

变换成

$$f\left(x',y',z'\right)=0$$

它就是具有不变性的轨迹。由此可见，第一个质点轨迹相对于坐标转动变换并不具有不变性，而第二个质点轨迹对于坐标转动变换是有不变性的。

下面讨论涉及时间的变换，坐标系 K 及 K' 所用的时间 t 及 t' 也可以是不相同的。最常遇到的一种时同变换，是所谓时间平移，即 $t = t' + t_0$，也就是 K 及 K' 的时间坐标的原点相差一常数 t_0。譬如，在参考系 K 中用东京时间，在参考系 K' 中用北京时间，那么，常数 t_0 就等于 1 小时。

如果在参考系 K 中，轨迹函数是

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

我们很容易推知，在参考系 K' 中，轨迹函数是

$$x = x\left(t' + t_0\right)$$
$$y = y\left(t' + t_0\right)$$
$$z = z\left(t' + t_0\right)$$

另一种时间变换在日常生活中不常见, 但在物理上非常有用。那就是

$$t = -t'$$

它表示当 K 中的时间走向将来时, K' 相应的时间却走向过去。因此，称这种时间变换为时间倒转。

我们不难由参考系 K 中的轨迹函数

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

得到相应在参考系 K' 中的轨迹函数为

$$x = x\left(-t'\right)$$
$$y = y\left(-t'\right)$$
$$z = z\left(-t'\right)$$

为了弄清时间倒转的物理意义，我们举一个直线运动的例子(图2.5)。质点沿 X 轴运动。在参考系 K 中看，$t=1$ 时，质点在 x_1；$t=2$ 时，在 x_2；显然，质点是从左向右运动的。但在参考系 K' 中看, 质点在 x_1 时，$t'=-1$；在 x_2 时，$t'=-2$；由于时间 $t'=-2$ 比 $t'=-1$ 早，而时间总是从过去向将来发展，因此，相对于参考系 K'，质点是从右向左运动的。

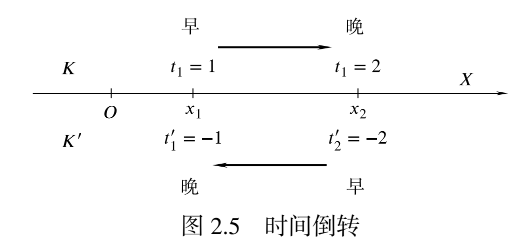


图 2.5　时间倒转

2.3　速度的相对性

我们首先讨论质点的直线运动。

取参考系 K 和 K' 的 X 轴都和质点轨迹重合，而两原点 O、O' 相距为 d(图2.6)。由式(2.2.3)知，K, K' 之间的坐标变换是

$$x' = x - d$$

现在，若 K' 相对于 K 以均匀速率 u 沿 X 正向运动，则有

$$d = ut + d_0$$

图 2.6　速度的相对性

其中 d_0 是时间 $t=0$ 时，坐标原点 O，O' 间的距离。故坐标变换公式为

$$x' = x - ut - d_0 \tag{2.3.1}$$

有了式(2.3.1)，就不难讨论 K，K' 之间的变换关系。

设在 K 系中，质点轨迹函数为

$$x = x(t)$$

根据定义，质点相对于 K 系的速度为

$$v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

相对于 K' 系，由式 (2.3.1)，质点的轨迹函数应为

$$x' = x'(t) = x(t) - ut - d_0$$

按照定义，质点相对于 K' 的速度为

$$v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - u$$

即

$$v' = v - u \tag{2.3.2}$$

式(2.3.2)就是同一质点相对于 K 及 K' 二者的速度之间的关系。

现在把式(2.3.2)推广到三维情况。

由图2.7 知，在 K 及 K' 中，质点 P 的位置分别用 $\mathbf{r}$，$\mathbf{r}'$ 表示。它们之间的关系是

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{d}$$

如果 K' 系相对于 K 系以均匀速度 $\mathbf{u}$ 运动，则有

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}t + \mathbf{d}_0$$

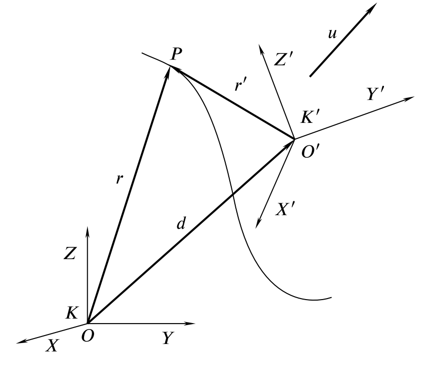


图 2.7　相对作匀速运动的 K 及 K'

其中 $\mathbf{d}_0$ 是时刻 $t = 0$ 时，从 O 到 O' 的矢量。故有

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0 \tag{2.3.3}$$

若在 K 系中，质点的轨迹函数是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

则根据定义，质点相对于 K 的速度是

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{2.3.4}$$

另一方面，由式(2.3.3) 可以求出质点在 K' 系中的轨迹函数，它是

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0$$

因此，质点相对于 K' 的速度是

$$\mathbf{v}'(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} - \mathbf{u} \tag{2.3.5}$$

即
$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \tag{2.3.6}$$

式(2.3.6)就是三维情况的速度变换公式，又称速度合成公式。可见，在不同参考系中，同一运动可能具有不同速度，亦即速度是具有相对性的概念。

【例 1】 一人向东以 $v_1 = 50$米/分 的速度运动，他觉得风从正南方吹来。假若人行速度增至 $v_1' = 75$ 米/分，他觉得风从东南方吹来。求风的速度 $\mathbf{v}$。

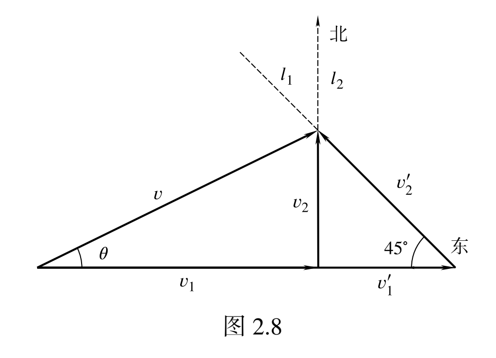


图 2.8

解 设两次感觉到的风速为 $\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_2'$。根据题意，各个速度应有以下关系：

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' = \mathbf{v} \tag{2}$$

作出矢量图 (图2.8) 由式(1)知 $\mathbf{v}$ 的末端在 l_1 上，由式(2)知 $\mathbf{v}$ 的末端在 l_2 上，故 l_1 和 l_2 的交点是 $\mathbf{v}$ 的末端。显然有：

$$v_1 = v_1' - v_1 = 76 - 50 = 25 \text{ 米/分}$$

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{50^2+25^2}=25\sqrt{25}\text{ 米/分}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1}=\operatorname{arctg}\frac{25}{50}=26°35'$$

从而可看到不同参考系中能感觉到不同的风速。在地球参考系中风速是 $\mathbf{v}$，以 50 米/分向东行走的人感觉风速是 $\mathbf{v}_2$；而以 75 米/分向东行走的人则感觉到风速是 $\mathbf{v}_2'$。

【例 2】 一列火车以速度 $\mathbf{v}_1$ 沿水平直轨运行。车上有人以初速度 $\mathbf{v}_2$ 竖直向上抛出一小球。车上及地面各站一人研究小球的运动。在不计空气阻力情况下，不同观察者看到速度，加速度及轨迹有何不同？

解 (1) 以车为参考系。

因为 $$\mathbf{v}=\mathbf{v}_x+\mathbf{v}_y=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}$$

$$v_x=0,\ v_y=v_2-gt$$

所以 $$\mathbf{v}=\left(v_2-gt\right)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}|=v_2-gt$$

运动在铅直线上进行，是竖直上抛运动；加速度是重力加速度 g。

(2) 以地心为参考系。

因为 $$\mathbf{v}=\mathbf{v}_x+\mathbf{v}_y=v_1\mathbf{i}+\left(v_2-gt\right)\mathbf{j}$$

故 $$|\mathbf{v}|=v=\sqrt{v_1^2+\left(v_2-gt\right)^2}$$

这表示速度的大小、方向都在变。运动方程是

$$\begin{cases}x=v_1t\\ y=v_2t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

轨道方程为抛物线

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2v_1}x^2$$

加速度 $\mathbf{a}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=-g\mathbf{j}$，沿垂直方向向下。

(3) 以地面为参考系，小球沿抛物线运动，相当于一个以初速率 $v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$，抛射角为 $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{v_2}{v_1}$ 的抛射体运动。

【例 3】 光行差现象。

具有不同运动状态的观察者所见的星体的方位是不同的，这种差别叫做光行差。因地球公转运动而产生的光行差称为周年光行差，因地球自转而产生的光行差称为周日光行差。

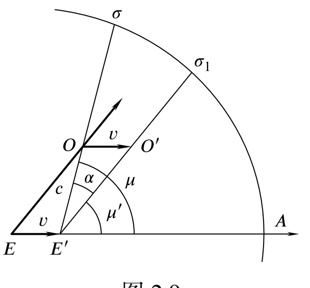


图 2.9

在图2.9 中，若观测者相对于某星是静止的，他观测到某星在天球上的位置是 σ，则星光到达望远镜物镜中心 O 时，其目镜位置在 E' 点。若观测者跟随着地球运动，EE' 为此时地球的运动方向，因星光由 O 点到达目镜的时间为 τ，故在此时间内，地球运行的距离为 $EE' = \tau v$($\mathbf{v}$ 为地球运动的速度)；因光速为 c，当星光到达目镜时，目镜已移至 E' 点，所以 $OE' = \tau c$ 是星光在 τ 内传播的距离。若地球静止不动，则望远镜对准基的方向为 $E'O$。当地球运动时，望远镜指向 $E'O'$ 方向才能接收到星光，这是星的视方位。相应的，星由真位置 σ 移至视位置 σ_1，

设星的真方位与观测者速度 $\mathbf{v}$ 间的交角为 μ，星的视方位与 $\mathbf{v}$ 的夹角为 μ'，则光行差为 α，且有

$$\alpha = \mu - \mu'$$

由三角形 $OO'E'$，得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\mu'} = \frac{OO'}{OE'} = \frac{\tau v}{\tau c} = \frac{v}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{c}\sin\mu'$$

因为 α 很小，所以

$$\begin{aligned}\alpha &\approx \frac{v}{c}\sin\mu' \text{ 弧度}\\ &= \frac{v}{c}\sin\mu' \times \frac{180}{\pi} \times 60 \times 60 \text{ 秒}\\ &= \frac{v}{c}\sin\mu' \times 206265 \text{ 秒}\\ &= k\sin\mu' \text{ 秒}\end{aligned}$$

其中 k 称为光行差常数。

已知地球公转速率为 $v = 29.770$ 公里/秒，光速 $c = 299,774$ 公里/秒，所以周年光行差常数

$$k_{\text{年}} = \frac{29.770}{299,774} \times 206,265 = 20.48 \text{ 秒}$$

已知地球半径 $R = 6,378$ 公里。地球自转一周的时间为 $T = 86,164$ 秒。所以在纬度 φ 处的地面速度为

$$v_\varphi = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} = 0.464\cos\varphi \text{ 公里/秒}$$

因此，周日光行差常数为

$$\begin{aligned}k_\varphi &= \frac{0.464}{299,774} \times 206,265 \times \cos\varphi \text{ 秒}\\ &= 0.32\cos\varphi \text{ 秒}\end{aligned}$$

2.4 加速度的相对性

根据速度合成公式(2.3.6)，如果在时刻 t，质点对于 K，K' 的速度分别为 $\mathbf{v}(t)$ 及 $\mathbf{v}'(t)$，而 K' 相对于 K 以 $\mathbf{u}$ 作匀速运动，则有

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u} \tag{2.4.1}$$

根据加速度的定义。质点相对 K 的加速度是

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.2}$$

而相对于 K' 的加速度是

$$\mathbf{a}' \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.3}$$

将式(2.4.1)对时间求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \tag{2.4.4}$$

因 $\mathbf{u}$ 是不随时间变化的，故 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = 0$，所以得

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \tag{2.4.5}$$

这个结果告诉我们，同一质点对于两个相互匀速运动的参考系的加速度是一样的。换言之，质点的加速度对于相对匀速运动的所有参考系，具有不变性。

最后指出，对于相对以非匀速运动的两个参考系，式(2.4.1)不再成立。例如，若 K' 相对于 K 作匀加速运动。加速度为 $\mathbf{a}_0$，则 K' 相对于 K 的速度为 $\mathbf{u} = \mathbf{a}_0 t$，从而式(2.4.1)相应改为

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{a}_0 t$$

由此可以推得

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \tag{2.4.6}$$

这表示对于相对以匀加速度 $\mathbf{a}_0$ 运动的两个参考系，质点对 K 及 K' 的加速度 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{a}'$，二者之间满足矢量加法关系 (式(2.4.6)). 在这种情况，加速度是没有不变性或绝对性的。

2.5 伽利略变换

我们可以把前两节的结果概括如下，对于任何一组相互作匀

速运动的参考系而言，速度是相对的，即同一质点相对于不同参考系有不同的速度；加速度是绝对的，即同一质点相对于不同参考系的加速度是一样的。

这些结果是相当平凡的，由日常生活的经验也不难接受这些结果，它们似乎很“浅显”。然而，物理学的特点之一，就是不放过任何一个“浅显”的概念，总是力图找出这些“浅显”概念的根基是什么。上两节的目的，正是要找出由式(2.2.6)所表达的速度相对性，和由式(2.4.5)所表达的加速度绝对性的根基。

它们的根基就是参考系 K 与 K' 的时空度量之间的变换关系。现在，我们较仔细地分析一下这个变换关系。

仍假定 K 与 K' 二者相对作匀速运动，K 的时空坐标为 t，$\mathbf{r}$；K' 的为 t'，$\mathbf{r}'$。K 与 K' 的时空坐标之间的关系之一，由式(2.3.3)给出，即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0 \tag{2.5.1}$$

其中 $\mathbf{u}$ 是 K' 相对于 K 的运动速度。在推导式(2.3.6)或式(2.4.5)时，我们还隐含地应用过另外一个关系。注意在式(2.3.5)中我们用了

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{2.5.2}$$

它作为质点相对于 K' 的速度，然而，严格地说，$\mathbf{v}'$ 应定义为

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} \tag{2.5.3}$$

即必须用 K' 系的时间 t'。这样，对比式(2.5.2)及式(2.5.3)就可以看到，在这里我们实质上假定 $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$，或者

$$t' = t + t_0 \tag{2.5.4}$$

其中，t_0 为一常数。

式(2.5.1)及式(2.5.4)给出了 K 与 K' 的时空坐标之间的完整的变换关系，它被称为伽利略变换。式(2.3.6)及式(2.4.5)都只是伽利略变换的推论。

伽利略变换表明，时间、空间具有下列的基本性质。

1. 时间间隔的绝对性

对于一个运动过程，相对于 K，它的开始与终了的时刻若分别为 t_1, t_2，则相对于 K' 它的开始与终了的时刻分别为 $t'_1 = t_1 + t_0, t'_2 = t_2 + t_0$，因此有

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \equiv \Delta t' \tag{2.5.5}$$

上式的物理意义是，一个过程的时间间隔与参考系的选取无关，是绝对的。

2. 长度的绝对性

有任一直尺，相对于 K，它的两个端点的坐标为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$，则相对于 K'，端点的坐标应分别是 $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0, \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0$，故有

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2| \tag{2.5.6}$$

它的物理意义是，一直尺的长度是与参考系的选取无关的，是绝对的。

总之，速度相对性是以时间间隔和长度的绝对性为基础的，

2.6 速度合成律的失效

如图2.10 所示，如果在炮车上装有两门相同的大炮，一门向右，一门向左。如果炮车相对地面静止（图2.10(a)），这时，不论从地面参考系 K，还是从炮车参考系 K' 看，同时向左、右发射出的炮弹的速率都是 v。如果炮车相对地面以 u 的速率向右匀速运动（图2.10(b)），从 K 看，按速度合成规律（式(2.3.6)），向右的炮弹速率是 $v + u$；向左的炮弹速率是 $v - u$。实验也相当精确地证明了这一点，它表明，速度的合成公式是符合实际的。

我们现在要问：速度合成律对任何情况都成立吗?

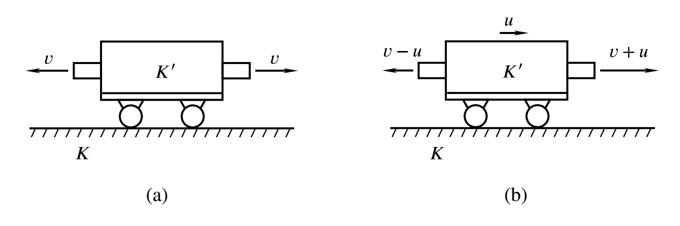


图 2.10　速度的合成

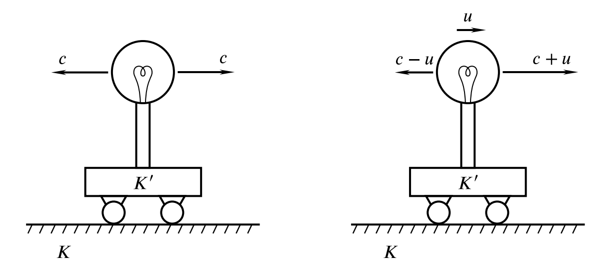


图 2.11　光的速度合成

再考虑一个如图2.11 所示的实验，这里仅把大炮改为灯泡，灯泡发出的光与炮弹相当，光相对于灯泡的速率是 c。根据速度合成律，当灯泡相对于地面以速率 u 向右匀速运动时，则向右发出的光对于地面参考系 K 的速率应是 $c+u$，而向左发出的光对于 K 的速率应是 $c-u$。这个结果对吗？现在我们举一些显而易见的例子，来说明这个结果是不正确的。

上述实验是把速度合成律应用到光传播的现象中去。根据光学知识，我们知道，一个物体 A 之所以能被看到，是由于从物体 A 发出的光（或从它反射的光）传到了我们的眼睛。例如，在图2.12 中，1 投球，2 接球。2 看到球 A，是由于球 A 发出的光到达 2。如果光速为 c，1 到 2 之间距离为 L，并且 1 即将投球的时刻为 $t=0$，则 2 看到 1 即将投球的时刻为

$$t_{2投}=\frac{L}{c}$$

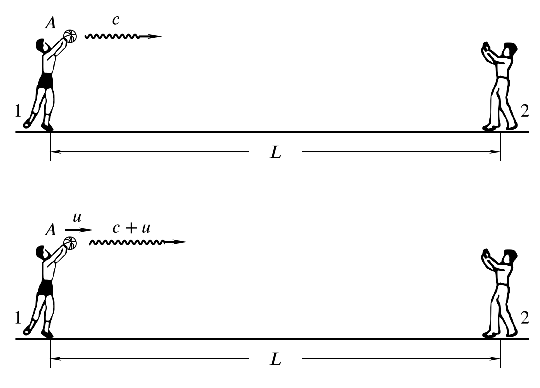


图 2.12 光的速度合成引起的混乱

当 1 刚刚将球投出时，球 A 速率为 u，如果光也满足速度合成律，那么，这时球 A 发出的光相对于地面的速度应为 $c+u$。如果 1 刚刚将球投出的时刻是 $t=t_{1出}$(即 1 投球这一动作所用的时间间隔)，则 2 看到 1 刚刚将球投出的时刻应为

$$t_{2出}=t_{1出}+\frac{L}{c+u}$$

从原则上讲。我们总有办法 (譬如增大 L) 使下式成立

$$\frac{L}{c}>t_{1出}+\frac{L}{c+u}$$

亦即

$$t_{2投}>t_{2出}$$

上式表明，2 看到 1 开始投球的时刻比他看到 1 已经投出球的时刻还要晚。更形象地说。2 将先看到球 A 飞出，而后才看到 1 的投球动作。这就是说，如果光的传播也满足速度合成公式(2.3.6)，必然导致先看到后发生的事，后看到先发生的事这种奇怪的现象，然而，谁也没有见过这种现象。这说明光并不满足速度合成公式。

当然，有人会说，上述例子是假想实验，由于光速是很大的，L/c 或 $L/(c+u)$ 实际上都接近于零，因而不可能观测到这种现象。

的确，在日常生活中涉及的速度与光速相比都是很小的，把光速看成无限大，上述矛盾就没有了。但是，光速并不总能被看成无限大，特别是在天体尺度上，光速不能被认为是无限大，光传播中的矛盾是逃避不掉的。下面我们分析一个天文学上的真实例子。

我国史书《宋史》中有下列的记载："至和元年五月己丑出天关东南可数寸岁余稍没"，《宋会要辑稿》也记载："至和元年五月晨出东方守天关昼见如太白芒角四出色赤白凡见二十三日"。这个重要的天文观测记录说的是一次非常著名的超新星爆发事件，现称为公元 1054 年的超新星。

所谓超新星指的是恒星在特定的演化阶段出现的一次大爆发。原来发光很弱的星体，在爆发时，向外抛出速率很高的大量物质，并发出很强的光，过不长的一段时间，又再暗下去。现在已确定，1054 年超新星的遗迹就是金牛座中的蟹状星云，它到地球的距离约为 $L \approx 5000$ 光年，爆发时，喷射物的速率至少有 $u = 1500$ 公里/秒。

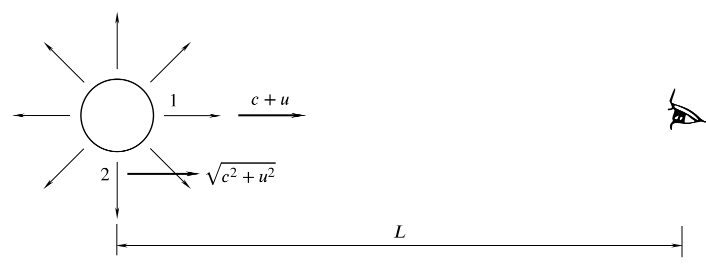


图 2.13　超新星爆发过程中光的传播

由图2.13 看出，如果爆发时刻为 $t = 0$，且爆发时间极短，则根据速度合成律，1 处发出的传向观察者的光相对地面的速率是 $c + u$，所以观察者看到 1 发光的时刻是

$$t_1 = \frac{L}{c+u} \approx \frac{L}{c}\left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

同样，根据速度合成律，2 处（弧 $\widehat{12} = 90°$）发出的传向观察者的光相对于地面的速率约为 $\sqrt{c^2+u^2}$，故观察者看到 2 发光的时刻是

$$t_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2+u^2}} \approx \frac{L}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{c^2}\right)$$

显然，观察者见弧 $\widehat{12}$ 中发光的时刻介于 t_1 到 t_2 之间，因此观察者看到星发光的时间至少应是

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{Lu}{c^2}$$

代入有关数据，计算而得

$$\Delta t = 25年$$

如果爆发不作瞬时过程处理, 则看到超新星的时间应比 25 年还要长。

但是，这个下限与实际观测是不相符合的。记录上说："凡见二十三日" (白天看到) 或 "岁余稍没" (夜里看到)。即一年多就消没了。

上述真实例子说明，对于光传播的现象，速度合成律是失效的。它说明，从超新星不同地方发出的光，即不同光源发出的光，相对于地面的速率之间的差别，不应有式(2.3.6) 所给出的那样大。现代更精确的实验表明。光速是与光源速度无关的，无论光源的速度有多么大，由它发出的光的速度仍与静止光源发出的光的速度相同。这就是光速不变性，这个特点最初是由爱因斯坦注意到的。

显然，光速不变性与速度合成律〔式(2.3.6)〕之间存在着严重的矛盾，而问题的根源就在于伽利略变换并不总是适用的。

2.7 光速不变的结论之一——运动钟的变慢

现在我们来分析，从光速不变性能得出什么结论。光速不变性使我们所看到的物理现象总是因果相继的，免除了因果倒置的混乱。但是，光速不变性却动摇了另一个传统观念—时间间隔的不变性。

我们可以用光速不变性来设计一种雷达钟。图2.14(a) 是一个雷达式的装置，在距离雷达天线 d 处放一反射镜，那么，从天线发出光信号到天线重又接收到这个光信号一个来回的时间间隔应为

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

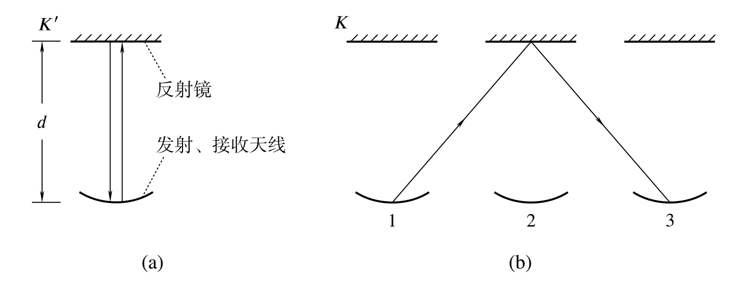


图 2.14 雷达钟

由于光速不变，我们可以用一个来回作为度量时间的单位。这个装置就是一种钟。

现在，我们让这个钟固定在 K' 中，一起以匀速 u 相对于 K 沿垂直于 d 的方向运动。在 K' 中看，光信号一个来回仍走 $2d$，它的时间间隔仍为

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

但是在 K 中看来，光信号这时走的是之字形路径〔图2.14(b)〕光信号发出时，钟位于 1，镜反射光信号时，位于 2，接收光信号时，位于 3。因而，这光信号的一个来回，在 K 中看来是走两条斜线。如果这个来回在 K 中看，所需时间间隔为 Δt，则按光速不变性，斜边长为 $\frac{1}{2}c\Delta t$，底边 1 到 2 的长 $\frac{1}{2}u\Delta t$，故由直角三角形关系有

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}u\Delta t\right)^2 + d^2 = \left(\frac{1}{2}u\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\Delta t'\right)^2$$

解之得

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.7.1}$$

此式表明，在 K' 中需用 $\Delta t'$ 时间间隔的过程，在 K 中观测就不等于 Δt，而是 $\Delta t > \Delta t'$。当 K' 中的钟走了一个单位时间间隔即 $\Delta t' = 1$ 时，K 中的钟已走了 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > 1$。也就是说，由 K 看来，K' 中的钟变慢了。K 看 K' 的钟是在运动，故运动的钟变慢。反过来，由 K' 来看 K 中的钟时，我们可以用完全相同的推理方法 (注意此时 K 沿 K' 的 x' 的负向以速率作匀速运动)，得到

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.7.2}$$

可见，K' 看 K 中的钟也变慢。

有人会说，这岂不矛盾！其实并不矛盾。因为他们是在不同的“立场”上说话的，两种说法实际上是一致的，可以统一地表达为：相对于观测者运动的钟变慢。

时间的变慢已有大量的实验证明。最有名的是 μ 子的衰变。从实验室中产生的 μ 子，寿命只有约 2.2×10^{-6} 秒，这样，即使它以光速 $c\approx3\times10^{8}$ 米/秒运动，也只能走过

$$2.2\times10^{-6}\times3\times10^{8}=660\text{ 米}$$

另一方面，宇宙射线产生子的区域约在 $1500\sim2000$ 米的高空。但是我们发现不少从上层大气中产生的从子跑到地面上来了。为什么？就因为寿命 2.2×10^{-6} 秒是对于 μ 子静止的参考系 K' 而言的，当 μ 子运动时，在地面上 (即参考系 K) 看来，它的寿命应为 $\Delta t=\dfrac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 秒，其中 u 是 μ 子的运动速度，当 u 接近于 c 时，Δt 比 2.2×10^{-6} 秒大得多，即 μ 子的寿命变长了，因而它可以飞过距离

$$L=u\Delta t\gg660\text{ 米}$$

即能从高空飞到地面上来。

1964 年，欧洲核子研究中心 (CERN) 通过实验定量地验证了时间延长公式。用两个同时产生的 μ 子，让其中之一相对于实验室静止，另一个在加速器中运动。结果证明，运动子的寿命变长，两子的寿命比值和在加速器中的运动速度 u 之间的关系完全符合式(2.7.2)。

运动钟变慢与我们从日常生活中得来的感觉完全不同。因此，不免有人会问："到底钟是否真的变慢了?" 物理学，特别是力学，有很多内容是描写我们日常看到和感觉到的东西的。但是，物理学与我们日常的直观有很多不同。物理学要求每个陈述有明确的含义，特别是要指出每一个物理量是如何测量的，然后再在这个基础上研究规律的建立。一般地诉诸于感觉如何如何，这不是物理学，只不过是粗浅的认识。

上述的“到底”一问似乎很有道理，但却是没有物理价值的，为什么？因为该处的“到底”是不能测量的。如果能指出“到底”是在什么情况下进行什么测量的，我们才可作出明确的回答。如果不能指出这一点，那说明这个问题本身就是非物理的，物理学不研究这类问题。一旦研究测量方法，而测量又要相对于一定的参考系，则必然走到我们上述的体系中去。

物理学的基础是测量，如果在原则上含有不能测量的东西，这种东西本身就缺乏物理意义，因为这种不能测量的东西，既无法用实验证实它，也无法否证它。用现代物理学的语言说，一种理论要具有物理价值，就要具有可证伪性，即所有有关的量以及断言，都能直接或间接由实验加以验证。这是我们判断一种理论有没有物理价值的基本原则之一。

2.8 光速不变的结论之二——运动尺的变短

在上节中，我们看到光速不变动摇了伽利略变换的根基之一——时间间隔的绝对性。现在我们将证明，在光速不变的前提下，伽利略变换的另一个根基—长度的绝对性也不再成立。

对地面上的观测者来说，从大气层上部冲下来的 μ 子的寿命延长了。随同 μ 子一起运动的观测者会看到什么情况呢？

由于相对于子为静止的观测者与地面上的观测者都同样观测到 μ 子从高空运动到地面这一事实，而且他们也都观测到他们之间的相对速度是 u。对于地面上的观测者来说 μ 子的寿命 $\Delta t = \dfrac{2.2\times 10^{-6}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ 秒，Δt 大了，故 $L\,(= u\Delta t)$ 大于 μ 子出生处到地面的高度，所以它能到达地面。而随 μ 子运动的观察者所看到 μ 子的寿命应是 2.2×10^{-6} 秒。那么他怎么解释 μ 子到达地面这一事实呢？这只能有一种可能性，即随同 μ 子运动的观测者主张：μ 子出生

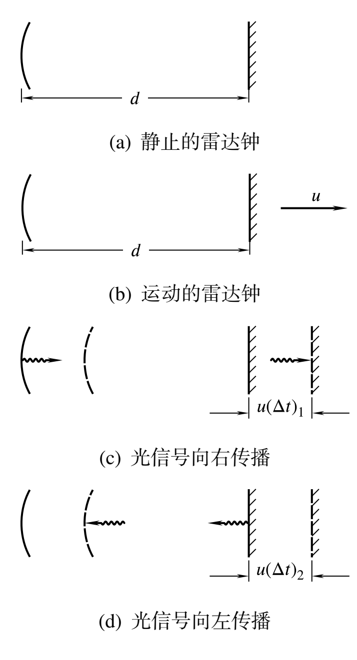
处到地面的距离变短了。即一旦时间间隔不变性不成立，则长度不变性也要被破坏。如果我们设想从地面到高空立着一个尺，尺静止在地面上，地面观察者看尺长为 L；而相对于 μ 子静止的观察者看来，这尺长为 L'，即

$$\frac{L}{\Delta t} = \frac{L'}{\Delta t'}$$

$$L' = L\frac{\Delta t'}{\Delta t} = L\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{2.8.1}$$

这尺对于 μ 子上的观察者在运动，故 $L' < L$，即运动的尺变短。

现在我们来证明式(2.8.1)。我们仍使用一个雷达钟。如图2.15(a)所示，当雷达钟与地面相对静止时，从地面参考系，即 K 系来观



(a) 静止的雷达钟

(b) 运动的雷达钟

(c) 光信号向右传播

(d) 光信号向左传播

图 2.15

察，它的天线与反射面之间的距离为 d；当雷达钟以速度运动时（图2.15(b)），由 K 系测得的距离表示为 d'。

我们考察光信号来回一次的运动。由于光在传播过程中雷达在不断地运动，所以，由 K 看来，光传播的距离并不是 d'。例如，当光向右传播，从天线到达反射面时，若所用的时间为 $(\Delta t)_1$，则所走过的距离应为 $d' + u(\Delta t)_1$，其中 $u(\Delta t)_1$ 一项表示在 $(\Delta t)_1$ 时间中钟向右运动的距离（图2.15(c)）。这样，我们有

$$(\Delta t)_1 = \frac{d' + u(\Delta t)_1}{c}$$

或者

$$(\Delta t)_1 = \frac{d'}{c-u} \tag{2.8.2}$$

类似地，光从反射面到天线的传播过程所用的时间 $(\Delta t)_2$ 应是

$$(\Delta t)_2 = \frac{d'}{c+u} \tag{2.8.3}$$

由式(2.8.2)及式(2.8.3)可以得到光信号一个来回耗费的时间

$$\Delta t = (\Delta t)_1 + (\Delta t)_2 = \frac{2cd'}{c^2 - u^2} \tag{2.8.4}$$

这是 K 系看到的结果。

在 K' 系，即雷达钟参考系来看，这个过程仍由下式描写

$$(\Delta t)' = \frac{2d}{c}$$

因为在 K' 系观察，钟的长度是 d。这样，式(2.8.4)可以改写为

$$\Delta t = \frac{1}{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} \left(\frac{d'}{d}\right) (\Delta t)'$$

再由上节推知的时间关系式(2.7.1)，上式就成为

$$d' = d\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

这就是式(2.8.1)

本节和上节的讨论用的都是雷达钟，因此，就存在一个共同的问题，即运动钟的变慢和运动尺的变短是否普遍？或者，这些推论是否只反映了雷达钟本身的性质，如果选择其他的钟有没有这种性质？这些问题我们留待第十一章再来讨论

思 考 题

1. 在亚里士多德体系中，哪些物理量是绝对的？哪些物理量是相对的？在牛顿体系中，哪些物理量是绝对的？哪些物理量是相对的？

2. 变换关系式(2.3.6)是否只适用于 u 为常量的两个坐标间的速度变换？

3. 试再举出一些有用的坐标变换。

4. 试举出一种相对于时间倒转变换为不变的运动。

5. 双星是一种天体，两颗星绕它们共同的质心在一封闭的轨道上绕行(图2.16)，如果我们的视线在轨道平面上，则双星中任何一颗星有时向着我们运动，有时离开我们运动。假使光速与光源速度有关，可用速度合成公式(2.3.6)。这样，我们将会看到什么现象？

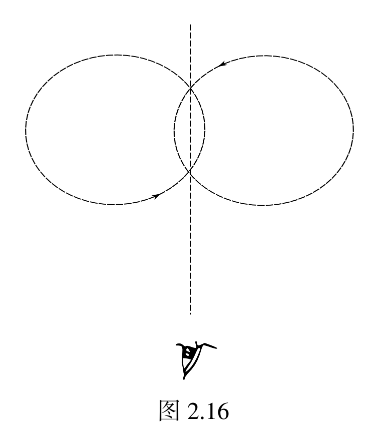


图 2.16

6. 如果地球总是以恒定的速度运动，也没有自转，能探测到光行差效应吗？

7. 由于地球的周年运动引起的光行差效应，使得恒星的视位置在一年之中绘出怎样的图形？

8. 在2.7 节中所述“运动钟的变慢”，是否是由于我们选用的雷达钟的特殊结构而引起的？

习　　题

1. 以不同的速率同时向不同方向抛出两物体。证明在运动的时候，若不计空气阻力，它们的相对速度固定不变。

2. 有一水平飞行的飞机，速度为 v_0，在飞机上安置一门炮，炮弹以水平速度 v 向前射击。略去空气阻力，求

(1) 以地球为参考系时炮弹的轨迹

(2) 以飞机为参考系时炮弹的轨迹

(3) 以炮弹为参考系时飞机的轨迹

3. 一辆汽车尾部敞开，顶篷只盖到 A 处 (图2.17)，乘客可坐到车尾 B 处，AB 联线与铅直方向成 $\varphi = 30^\circ$ 角。汽车在平直公路上冒雨行驶，当其速率为 6 公里/时时，C 点刚好不被雨打着若它的速率为 18 公里/时，则 B 点就刚好不被雨点打着。求雨点的速度 $\mathbf{v}$。

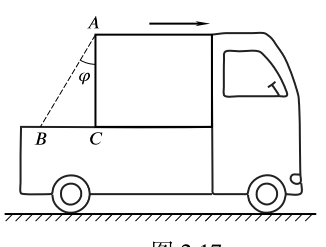


图 2.17

4. 以速率 v_1 运动的列车上的驾驶员，发现在前面与该车相距 d 处，有一列车在同一轨道上沿相同方向、以较小的速率 v_2 在运动，他立刻用制动器刹车，使他的火车以匀减速 a 慢下来，试证明：

(1) 如果 $d > \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ 则两车不会相撞；

(2) 如果 $d < \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$，则两车将要相撞。

5. 渔人在河中乘舟逆流航行，经过某桥下时，一只水桶落入水中，半小时后他才发觉，即回头追赶，在桥的下游 5.0 公里处赶上。设渔人顺流及逆流相对水的划行速率不变，求水流速率。

6. 甲乙两列火车在相邻的轨道上相向运行，甲的速率为 v_1，乙的速率为 v_2。从甲车上水平地投一物到乙车上。设投掷速率为 v_0 (v_0 在物体运动的全部时间内可认为是不变的)，从甲车上看，投掷方向与列车行驶方向垂直，试求：

(1) 物体的轨迹在路基上的投影与铁轨所成的角 φ_1；

(2) 物体的轨迹在乙车上的投影与乙车边缘所成的角 φ_2；

(3) 物体相对于路基的速度 v' 和相对于乙车的速度 v''。

7. 飞机罗盘指示飞机正在朝东飞行，地面情报指出，此时刮着正南风。如果风速 $|\mathbf{u}| = 40.0$ 公里/时，飞机相对空气的速度为 $|\mathbf{v}'| = 200$ 公里/时，试用矢量图表明：飞机相对于地面的速度 $\mathbf{v}$；驾驶员应怎样驾驶才使其前进方向相对于地面是朝向正东?

8. 一架飞机以相对于空气的匀速率 u 作水平直线飞行，从 A 飞到 B 再返回，从 A 到 B 的距离是 L。如果速率为 v 的风向有下列三种情况 (都有 $u > v$) ：

(1) 沿着从 A 到 B 的直线

(2) 垂直于从 A 到 B 的直线

(3) 与 A 到 B 的直线成角。

试求往返一次所需要的时间。并证明，由于风的存在，往返时间总是比无风的情况长。

9. 一升降机以 $a = 2g$ 的加速度从静止开始上升，在 2.0 秒末时有一小钉从顶板下落，若升降机顶板到底板的距离 $k = 2.0$ 米，求钉子从顶板落到底板的时间 t，它与参考系的选取有无关系?

10. 一飞机在海上布雷，当它在水面上高为 h 的地方以速率 v 沿水平方向飞行时，要想使鱼雷入水时，鱼雷不与水面发生拍击，即相对于鱼来说，水的速度完全沿鱼雷的轴线方向 (图2.18)。

设鱼雷从投下到入水，它的轴线与水平面的夹角不变。略去空气阻力，求当飞机投射鱼雷时，θ 应当等于多少？

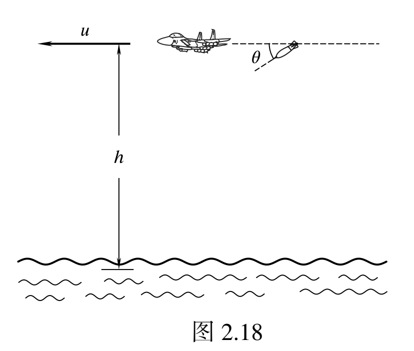


图 2.18

11. 设某一超新星到地球的距离 $L \geqslant 10^6$ 光年，若爆发是匀速球状膨胀，膨胀速率 $|\mathbf{v}|$ 约为 5×10^{-3} 光年/年。如果光速与光源速度有关，爆发后，在地球上有多长时间间隔都能观测到它的最大光度？

12. 在某一参考系 K 看来，物体 A 以匀速率 v_A 沿 x 轴正向运动，物体 B 以匀速率 v_B 沿 x 轴的负方向运动。试问：

(1) 在参考系 K 看来，A 与 B 之间相对运动的速度 v_{AB} 是多大？

(2) c 为真空中的光速，当 v_A=0.8c，v_B=0.6c 时，v_{AB} 是多少？

(3) 在同一参考系 K 中看来，两个物体 A 与 B 之间相对运动的速度 $v_{AB} > c$，是否违反狭义相对论？为什么？

(4) 在 A 看来 (即在随 A 一起运动的坐标系 K' 里看)，B 的速度 v'_B 仍旧是 v_{AB} 吗？

13. K 和 K' 是两个相互平行的系，K' 相对于 K 沿 x 轴以的 $\frac{1}{2}c$ 速率运动。问：

(1) 在 K 系中静止放置一把尺子，长为 l，在 K' 系来测量，尺子的长度是多少？

(2) 在 K 系中某点 A 发生一事件，时间间隔为 Δt，在 K' 系来看，这事件的时间间隔是多少？

14. 在实验室中观测到一个运动着的 μ 子在实验室坐标系中的寿命等于静止 μ 子寿命的 50 倍，求 μ 子相对于实验室坐标系运动的速度 v。

15. 爱因斯坦在他的创立狭义相对论的论文中说："一只在地球赤道上的钟，比放在两极的一只在性能上完全一样的钟，在别的条件都相同的情况下，要走得慢些。"根据各种观测，地球从形成到现在约为 50 亿年。假定地球形成时，就有爱因斯坦所说的那两只钟，问：现在它们所指示的时间相差多少？已知地球半径为 6378 公里。

16. 按上题同样道理，在地球看来，一只在月球上的钟，要比一个性质完全相同，所处条件也完全相同，放在地球上的钟走得略为慢些。设地球年龄为 $\tau = 50$ 亿年，月球绕地球转动的平均速率为 $v = 1.02 \times 10^5$ 厘米/秒。月球上的钟在 50 亿年里比地球上的钟慢了多少？

17. 类似 15 题，在太阳上的观测者将看到一只在地球上的钟，要比一只性能完全相同、所处条件也完全相同放在太阳上的钟走得略为慢些。设太阳年龄为 $\tau = 50$ 亿年，已知地球公转的平均速率为 $v = 29.76$ 公里/秒。地球上的钟在 50 亿年里比太阳上的钟慢了多少？

18. 一个"光钟"由两个相距为 L_0 的平面镜 A 和 B 组成。对于这个光钟为静止的参考系来说，一个"滴答"的时间是光从镜面 A 到镜面 B 再回到原处的时间，其值是 $t_0 = 2L_0/c$。若将这个光钟横放在一个以速度 $\mathbf{v}$ 行驶的火车上，使两镜面都与 $\mathbf{v}$ 垂直，而两镜面中心联线则与 $\mathbf{v}$ 平行。这时，若在铁轨参考系中看，火车上钟的一个"滴答" τ 与 τ_0 的关系怎样?

19. μ 子是不稳定的粒子，它自发地衰变为

$$\mu^{\pm} \longrightarrow e^{\pm} + \overline{\nu}_e + \nu_{\mu}$$

其中 $\mu^{\pm}$ 分别表示带正电或带负电的 μ 子，$\overline{\nu}_e$ 表示反中微子，ν_{μ} 表示 μ 中微子。上述自发衰变的寿命是 τ_0=2.2×10^{-6} 秒，这是对 μ 子静止的坐标系而言的。若 μ 子的速度 v=0.995c，它的寿命将为多少？

第三章

牛顿动力学

3.1 惯 性 定 律

在上两章中, 讨论了运动的描述, 而没有涉及运动的原因, 没有研究不同式样的运动之间的内在联系。譬如，自由落体为什么垂直向下做匀加速运动？行星为什么绕太阳旋转不息？自由落体与行星旋转两者之间有什么关系？这些就是本章及随后几章要讨论的问题。

研究物体运动的原因，通常称之为动力学。牛顿动力学就是有关物体的机械运动的动力学。可以说整个物理学的基本规律就是各种运动形态的动力学的总合。

牛顿动力学中的核心概念是力。

经验告诉我们, 物体的运动是由物体之间的相互作用引起的。列车的行进是由于机车的牵引作用，枪弹的射击是靠着炸药爆炸的作用。物体之间的相互作用，用“力”这个概念来表达。实际上，人对力最初的认识是源于人的肌肉对外物的作用。汉字的力，在篆书中的写法，就是筋肉的象形。

力的概念虽然出现得很早，但是关于力和运动的关系的正确认识，却得到得相当晚。在亚里士多德的《物理学》中有一条原理：“凡运动着的事物必然都有推动者在推动着它运动。”这个论断在几乎两千年的时间里, 被认为是无可怀疑的经典。的确, 我们日常看到的各种运动似乎都遵从这个论断，即必定有推动者 (即

力) 在维持着它的运动。就象一定的踏力保持着自行车的一定的运动状态，而一当踏力消失，车最终要变成静止。

伽利略开始明确地认识到亚里士多德的经典是不完全正确的，尽管许多运动的确都要靠外力的维持，但并非凡运动皆如此。伽利略用一个理想实验来证明亚里士多德的错误。他研究斜面上的运动 (图3.1)，让一小球从斜面上滚下。已经知道，小球的下滚是由于重力的作用，重力沿着斜面的分量拉着小球下滚。如果高度不变，α 越小，则 L 越大，同时重力沿斜面的分量也越小。伽利略曾做过一系列小球沿斜面下滑的实验。他发现，只要斜面足够光滑，无论 α 多么小，小球总能从斜面上滚下来。由这个结果就可以推测，即使当 $a \to 0$，$L \to \infty$ 的情况，小球还是可以滚“下”来的。显然，对 $a \to 0$，$L \to \infty$ 情况是无法直接做实验的，但从已知的实验结果可以推知这种极限情况的现象。这就是理想实验方法的关键。

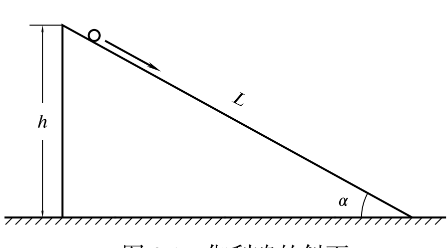


图 3.1 伽利略的斜面

在 $a \to 0$，$L \to \infty$ 情况，重力沿斜面的分量为零，即并没有外力推动小球“下”滚。因此，这种运动就是一种没有“推动者”的运动。对亚里士多德的“凡运动必有推动者”来说，上述运动就是一个反例。

伽利略的分析弄清了，存在一类运动，它们并不是由外力所维持。它们的特征是速度保持不变，即作匀速率的直线运动，或者静止。我们称物体不受外力作用的运动状态为自由运动。总之，处在自由运动状态的物体，必定作匀速直线运动，或者静止。这就是惯性定律。

有人可能会想到，速度或加速度都是具有相对性的，对参考

系 K 为匀速运动的物体，在参考系 K' 中可能成为非匀速的。那么，一个自由运动的物体，在有些参考系看来不也是作着非匀速运动吗？的确，在某参考系看来，一个不受力的物体也会作非匀速运动。

然而，惯性定律的意义是在于断言：对于一个物体的自由运动，一定可以选择一个参考系 K，相对于 K 该物体作匀速运动或静止，而且，其他所有自由运动的物体，对于 K 来说，也都是作匀速运动或静止。换言之，一定存在着这样的参考系，相对于它，所有不受外力作用的物体都保持自己的速度。这类特殊的参考系，称为惯性参考系，或惯性系。

简言之，惯性定律就是断定了惯性系一定存在。

惯性定律的确立，成为旧物理学 (即亚里士多德物理学) 的终点，同时也成为新的力学的起点。常称惯性定律为牛顿第一定律。本章以后的讨论，都采用惯性系。

3.2 牛顿第二定律

牛顿第一定律确立了不受力情况下物体的运动性质。本节讨论牛顿第二定律，它确立了外力对物体运动的作用。这个定律是：如果一个质点受到外界物体的作用，则它的运动遵循下列关系：

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{3.2.1}$$

其中 $\mathbf{a}$ 是质点的加速度，m 是它的质量；$\mathbf{F}$ 是外物对它的作用力。

在此定律中，我们一下子涉及了两个新的物理量：m 及 $\mathbf{F}$。虽然在上节讨论过力，但只限于受力或不受力，并没有给出力的定量的定义，以及如何从动力学的角度来定义力。另一方面，质量的粗浅概念也早就有了，问题同样是：什么是质量？并未解决。也曾有过各式各样的有关质量的定义。例如，有的定义是：质量是物体所含“物质的量”然而，这种定义没有物理的价值。因为，什

么叫“物质的量”？仍然是不确定的。在物理学中，一个物理量的定义，必须提供根据其他能够量度的量来计算它的一套规则。根据这个原则，在牛顿第二定律的范围中，可以对质量及力作如下的定义：

质量就是质点所受外力与所产生的加速度之比。

作用在一个质点上的力就是它的质量乘由于该力所产生的加速度。

看到这两条“定义”，读者一定会纳闷，这两条说法岂不就是式(3.2.1)的改头换面吗？这样一来，作为定律的式(3.2.1)岂不降为关于质量或力的定义？似乎出现了逻辑上的“混乱”。

如果离开上述的物理定义的原则，确实总逃不脱这个“混乱”。但是，从物理上来说，它是不混乱的。物理规律的作用在于把许多已知的实验结果统一起来，联系起来，给出许多实验现象的统一的解释，并且根据这种解释去预测一些新的现象或实验结果。也就是说，物理学规律的意义，是使我们能够从一些实验结果出发预言另一些新的实验结果，确立从一些实验数据计算出 (或预言出) 另一些实验数据的规则。只要定义、定律确立的联系测量数据的规则是明确的、不含糊的，那就没有任何“混乱”可言。牛顿第二定律〔(3.2.1)〕及质量和力的定义在这种意义上是没有任何“混乱”的。

举例说明。如图3.2所示，在一足够光滑的固定桌面上，我们

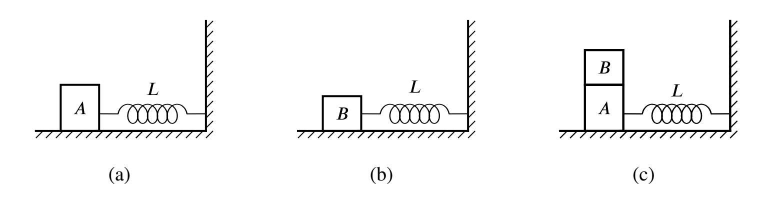


图 3.2　牛顿第二定律的含义

做三个实验。其一，物体 A 与一弹簧相连，把弹簧拉长到 L，然后释放物体 A，在弹簧的牵动下，A 作加速运动，测量出开始时刻的加速度 a_A；其二，用上述弹簧与物体 B 相连，仍拉长到 L，测出释放时刻的加速度 a_B；其三，仍是上述弹簧，拉长到 L，和捆在一起的 A，B 相连，测出释放时刻的加速度 a_{AB}。

上述三个实验，只用了运动学的概念，测得了一组数据，如果没有其他知识，我们就不能得到更多的东西。现在，我们看如何用动力学来得到的测量量 a_A，a_B，a_{AB} 之间的联系。

我们可以取物体 A 的质量作为质量单位的标准，故可任意定其数值为 m_A，利用式(3.2.1)作为力的定义，再由实验(a)测得的 a 即可算出弹簧对 A 的牵动力

$$F = m_A a_A \tag{3.2.2}$$

在实验(b)中，设弹簧对 B 的牵动力与牵动 A 时一样，仍为 F，则利用式(3.2.1)作为质量的定义，可算出 B 的质量

$$m_B = \frac{F}{a_B} \tag{3.2.3}$$

在实验(a)中，如果假设 A 与 B 在一起的质量 m_{AB} 是分别质量之和 (即质量是可加的)：

$$m_{AB} = m_A + m_B \tag{3.2.4}$$

再假定牵动力依然是 F，就可以用式(3.2.1)作为定律，来预言此时的加速度 a_{AB} 为

$$a_{AB} = \frac{F}{m_{AB}} = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{a_A a_B}{a_B + a_A} \tag{3.2.5}$$

我们注意到，式(3.2.5)中只含有实验直接可测的量 (与我们任意取定 m_A 值无关)，亦即牛顿第二定律给出了从一组实验〔(a),(b)〕的数据计算另一实验〔(c)〕的规则。如果这样计算出来的结果与观测值符合，就为牛顿第二定律的正确性提供了一个实验验证。这样一个理论与实验之间的全面关系告诉我们什么呢？

(1) 在整个分析过程中，我们的确有时将式(3.2.1)作为定义使用，有时又作为定律，但在每个具体环节上它的作用都是明确的，并没有同时既作定义，又作定律的情况，因而是不“混乱”的。理论与实验之间由一些测量操作联系着，由此就不难理解式 (3.2.1)既是定义又是定律、“身兼两任”的实质。

(2) 式(3.2.5)中都是实验可以直接测定的量，也就是说，由式(3.2.1)所给出的预言是明确的，具有可验证性或可否证性。

(3) 物理学的规律，例如牛顿第二定律，都有一定的适用限度。在限度之外，牛顿第二定律不再成立。在牛顿第二定律不适用的范围，用它来预言实验就不再正确，因而这时用它来作为定义也就没有意义了。或者说，当式(3.2.1)作为定律不再适用时，用它作为力及质量的定义就也不适用了。上述力及质量的定义也有其适用限度。这种“定义”显然与数学中所用定义的含义有很大差别。

(4) 只依靠牛顿第二定律来分析运动性质，还是不够的，必须扩充其他假定，才有可能预测运动。在上例中，不仅用了式(3.2.1)，而且用了两个假定：弹簧被拉长到同样的长度时产生同样的牵动力 F; 质量具有可加性。这个特点也与数学不相同。数学上的已知到求证之间，只能使用定理、定义进行逻辑推理，不外加其他东西。但物理上没有一个是如此。必定要补充一些外加的假设，才能从已知测量中作出预言。外加的假设，反映了我们对客观世界的看法，或者说是客观世界的一种模型。在什么地方应当补充些什么，或者说用什么模型去看客观世界，这是物理的难点，而这也正是物理学工作的精髓。

这样，我们就说明了牛顿第二定律既是动力学基本规律，同时又可作为质量及力的定义的全部意义。当然，这并不排斥我们去寻求不依赖于牛顿第二定律的关于质量及力的定义。但是，即使我们找到了更深入的定义，那么在牛顿第二定律适用的范围内，新的定义也必定等价于本节所述的定义。因此，在牛顿第二定律

适用的范围中，采用上述定义不仅是正确的，而且是“够用”的了。

按式(3.2.1)，力是一个矢量，它的合成、分解遵守矢量代数运算法则。质量是一个标量。

式(3.2.1)是一个矢量方程，它等价于三个分量方程：

$$F = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z$$

质量的单位是千克，千克的标准是保存在国际计量局中的一个铂铱圆柱体。在原子尺度上，利用原子质量单位，用 ^{12}C 作它的标准，国际协议规定 ^{12}C 的原子质量精确地等于 12 个原子质量单位。原子质量单位与千克的关系是：

$$1\ \text{原子质量单位} = 1.660\,565\,5 \times 10^{-27}\ \text{千克}$$

力的单位是牛顿，一牛顿力使质量为一千克的物体产生 1米/秒^2 的加速度。

3.3 牛顿第三定律

在前两节中，我们讨论了牛顿力学的前两个定律，即惯性定律和动力学的基本方程。从动力学的角度来说，有了这些定律就已完整了。牛顿第三定律实际上是关于力的性质的定律，而不是动力学本身的定律。

牛顿给出了物体间各种作用力所共有的一种性质，即作用等于反作用。详细些说，物体间作用力总是成对出现的，如果质点 A 对质点 B 的作用力为 $\mathbf{F}_{A\to B}$，那么，质点 B 对质点 A 也有作用力 $\mathbf{F}_{B\to A}$，而且两个力的大小相等，方向相反，并位于两质点的连线上，即

$$\mathbf{F}_{A\to B} = -\mathbf{F}_{B\to A} \tag{3.3.1}$$

这条定律，称为牛顿第三定律。

第三定律也有一定的应用范围。动力学的基本方程式(3.2.1)是在存在惯性系的基础上建立起来的。同样，第三定律也是建立在惯性系的基础上。另外要强调指出，即使在惯性系中，第三定律也是有时对，有时并不对。若物体之间彼此接触才有相互作用力，我们称为接触力。对于接触力，第三定律总是成立的。但是，对于两物体间有一定距离时的相互作用的力，第三定律有时成立，有时不成立。譬如，两个电荷之间的电磁作用力，第三定律就不总是正确的。

3.4 一些具体的力

找到了动力学基本方程之后，研究运动的要点是研究力，即根据给定物体和它周围环境的性质来计算作用在该物体上的力。我们在绪论中曾说过，物理学的主要任务就是要寻找力的统一，如果弄清楚自然界中的最基本的力，我们在原则上就能解释自然界中各式各样的运动现象。这里，我们先来简单介绍一些常见的力。

1. 弹性力

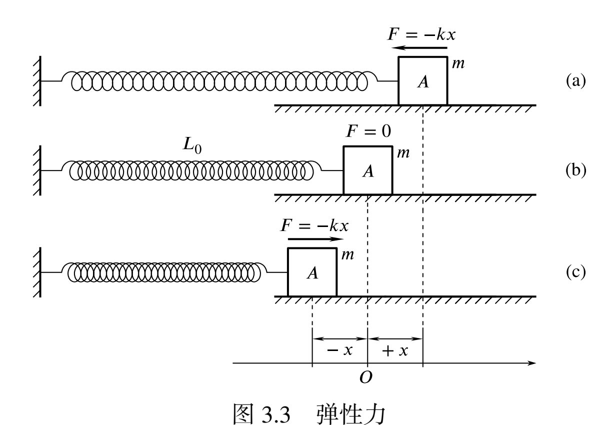


图 3.3　弹性力

一个倔强系数为 k 的弹簧和物体 A 相连，弹簧固有长度为 L_0（图3.3(b)）。在这个位置，弹簧对 A 不施力，称为平衡位置，取其为坐标原点。如果 A 向右移动（图3.3(a)），则弹簧将对物体 A 施向左之力，此力的大小为

$$F = -kx \tag{3.4.1}$$

如果将 A 向左移动（图3.3(c)），则弹簧对 A 施之力就指向右边，而此力为

$$F = -kx$$

在这两种情况下，它对 A 所施之力都指向平衡位置，故称其为回复力。

2. **摩擦力**

摩擦力是最常遇到的一种力，但是关于它的规律却是异常复杂的。我们在这里仅谈几条简单的规律。如图3.4 所示，两个固态物体之间的摩擦力 $\mathbf{F}_{摩}$，方向与运动或运动趋势的方向相反，在一定范围内，大小正比于两物体之间的正压力 P，即

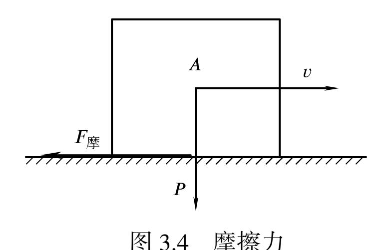


图 3.4　摩擦力

$$F_{摩} = \mu P \tag{3.4.2}$$

其中 μ 称为摩擦系数。一般说来，滚动摩擦系数小于滑动摩擦系数；运动状态的摩擦系数小于静止状态的摩擦系数。

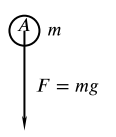


图 3.5　重力

3. **重力**

我们对重力也很熟悉，如图3.5 所示，在地球表面附近，一

个质量为 m 的物体受到的重力方向垂直于水平面，大小为

$$F = mg \tag{3.4.3}$$

其中 g 是重力加速度。

4. 万有引力

第四章将专题讨论。

5. 库仑力

带电体之间的相互作用规律是由法国物理学家库仑发现的，因而称之为库仑力。一个静止的点电荷要吸引或排斥另一静止的点电荷，力的大小与电荷的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比，方向沿着两点电荷的连线。如果电荷是异号的，则为吸引力；如果是同号的，则是排斥力。如图3.6 所示，库仑力的大小为

q_1 q_2 r

图 3.6　库仑力

$$F = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{3.4.4}$$

其中 κ 是比例系数，q_1，q_2 是两质点的电荷

6. 分子力

分子间相互作用的规律较复杂，很难用简单的数学公式来表示。一般在实验的基础上，采用简化模型处理问题，可近似地用下列的半经验公式来表示：

$$F = \frac{\lambda}{r^s} - \frac{\mu}{r^t} \quad (s > t) \tag{3.4.5}$$

式中为两个分子中心之间的距离；λ, μ, s, t 都是正数 (需根据实验数据加以确定)。式(3.4.5)中的第一项是正的，代表斥力第二项是负的，代表引力。由于 s 和 t 都比较大，t 一般约为 6 ～ 7，所以分子力随分子间距离 r 的增大而急剧地减小。这种力可以认为具有一定的有效作用距离，超出有效作用距离，作用力实际上

可以完全忽略。由于 $s > t$，所以斥力的有效作用距离比引力的小力随的变化情况大致如图3.7所示。

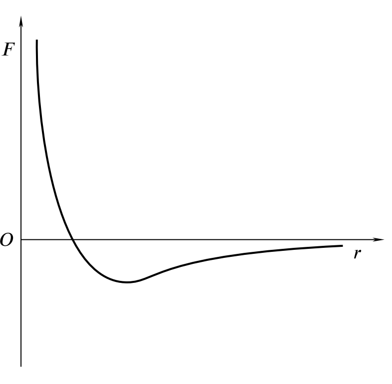


图 3.7 分子力

7. **核力**

核力是把原子核中的核子(质子和中子) 束缚在一起的力。这种力有效作用距离极短，对于大于约 1×10^{-13} 厘米的距离，核力很快就变得很小，可略而不计了。但在小尺度内，它却超过核子之间的一切其他形式的相互作占支配地位。这是一种异常复杂类型的相互作用，直到大约 0.4×10^{-13} 厘米，它还是吸引力，大小可表示为

$$F = \frac{C}{r^n}e^{-\frac{r}{r_0}} \tag{3.4.6}$$

其中 C，n 为常数；r 是两个核子间的距离，$r_0 \approx 10^{-13}$ 厘米。但距离若是再小，就成为强排斥力了。

8. **洛伦兹力**

一个带电荷 q 的点电荷以速度 $\mathbf{v}$ 在磁感应强度为 $\mathbf{B}$ 的磁场中运动，要受到磁场的作用力，此种力称为洛伦兹力，其表达式为：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{3.4.7}$$

9. **粘滞力**

物体在流体 (液体或气体) 中运动时，受到阻力。这种力是流体粘滞性的一种表示。当运动物体速度不太大时，粘滞力可表示为：

$$\mathbf{F} = -\eta\mathbf{v} \tag{3.4.8}$$

其中系数 η 表示粘滞性，负号表示粘滞力与运动方向相反。

以上我们列举了九种力，当然，还可以举出很多种。在绪论中，我们指出，物理学并不仅仅满足于把各式各样的力罗列出来，因为，物理学认为客观世界的现象虽是复杂的，但原因却是简单的。从本质上讲，自然界并不存在如此多种类型的力，我们希望寻求各种现象的统一。在目前的宇宙中，存在着四类基本的相互作用，所有的运动现象的原因都逃不出这四类基本的力，各式各样的力只不过是这四类基本力在不同情况下的不同表现而已。四类基本作用是：引力作用、电磁作用、强相互作用、弱相互作用。而在宇宙的早期，这些力之间表现的不同可能也不存在，它们逐步合成最基本的力。例如，在宇宙年龄约 1 秒之前，电磁作用和弱相互作用的差别可能完全消失了。

3.5 牛顿力学的一些简单应用

【例 1】 已知一个 10 千克的力 F 水平地作用于质量为 $M = 60$ 千克的物体上，并通过它推另一质量为 $k = 40$ 千克的物体 (图3.8)。m 与 M 都在水平面上，求：

(1) 设平面与物体之间无摩擦力，M 作用于 m 上的力多大?

(2) 若 m 的左边紧靠着一堵墙，M 作用在 m 上的力有多大?

(3) 设 M 与 m 同水平面之间的摩擦系数分别为 $\mu_1 = 0.05$ 和 $\mu_2 = 0.10$，M 作用于 m 上的力又有多大?

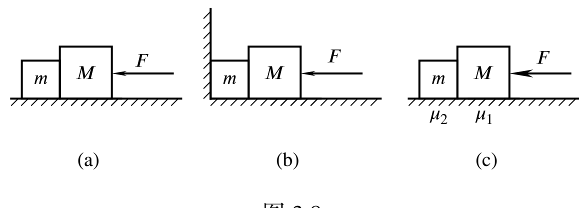


图 3.8

解　(1) 设 M 与 m 的加速度为 a 它们之间的相互作用力为 f_1，则 M 及 m 的受力情况如图3.9 所示，它们的牛顿方程分别为：

$$F - f_1 = Ma_1$$

$$f_1 = ma_1$$

f_1　M　F

m　f_1

图 3.9

解之得

$$f_1 = \frac{MF}{m+M} = 4\text{千克力} < F$$

(2) 因为 m 紧靠墙，故 $a_2 = 0$，所以

$$F - f_2 = 0$$

因此得

$$f_2 = F = 10\text{千克力}$$

(3) 受力情况如图3.10所示，M 及 m 的牛顿方程分别为：

f_2　M　F　$\mu_1 Mg$　m　f_2　$\mu_2 mg$

图 3.10

$$F - f_3 - \mu_1 Mg = Ma_4$$

$$f_3 - \mu_2 mg = ma_2$$

解之得

$$f_B = \frac{m\left(F - \mu_1 Mg\right) + \mu_2 mMg}{M+m} = \frac{mF + mMg\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{M+m} = 5.2\text{千克力} < F$$

【例 2】　已知两个质量同为 1 公斤的物体用轻的弹簧连接在一起，竖直地放在水平桌面上，如图3.11所示。求：

(1) 开始时两物都静止，将桌面突然移掉，在这一瞬间两物体的加速度各为多少？

(2) 在 m 上加多大压力，并保持其静止，才能使当压力突然撤去时，由于弹簧的反跳导致 m_B 刚刚离开面桌？

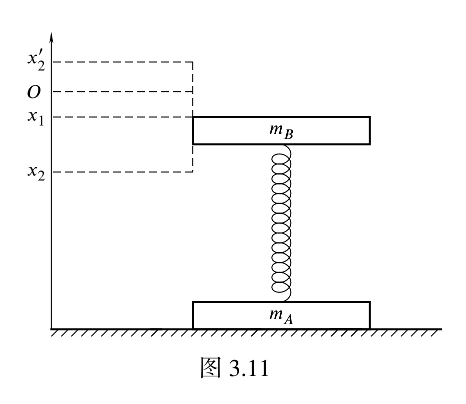


图 3.11

解 (1) 平衡时对于 m_A，重力 $W_A = m_A g$，是向下的;弹簧的伸张力 N_A 是向上的，故静力平衡方程为：

$$W_A - N_A = 0$$

或

$$W_A = N_A = m_A g$$

对于 m_B，重力 $W_B = m_B g$，是向下的 3 弹簧的伸张力为 N_B;，也是向下的；桌面的支持力 R 是向上的。故静力平衡方程为：

$$W_B + N_B = R$$

由于弹簧向上下的伸张力相同，则有

$$N_A = N_B$$

突然撤去桌面，故 $R = 0$，这时，物体 A 受到的总力为 $F_A = \sum_i F_{A_i} = W_A - N_4 = 0$，即加速度为

$$a = 0$$

物体 B 受的总力为

$$F_B = \sum_i F_{B_i}$$

$$= W_B + N_B = m_B g + m_A g$$

故加速度为 $$a_R = \frac{m_A + m_B}{m_B} g = 2g$$

(2) 如图3.11所示，弹簧原长在 O 点，加 m_A 后压缩至 x_1 点，

再加压力 P 后压缩至 x_2 点。因为弹簧反跳的距离等于被压缩的距离，所以撤去压力 P 后弹簧到达的最高点为 x_2'，并且

$$\overline{x_1x_2} = \overline{x_1x_2'}$$

若要求 m_B 能离开桌面，应有

$$k\overline{Ox_2'} \geqslant m_Bg$$

其中为弹簧的倔强系数。因而，压力至少应为

$$\begin{aligned} P &= k\overline{x_1x_2} \\ &= k\overline{x_1x_2'} \\ &= k\left(\overline{x_1O} + \overline{Ox_2'}\right) \\ &= k\overline{x_1O} + k\overline{Ox_2'} \\ &\geqslant m_Ag + m_Bg \end{aligned}$$

所以，当 $P \geqslant (m_A + m_B)g = 2$公斤力 时，可使 m_B 离开桌面。

【例 3】 如图3.12的装置，设各接触面都是光滑的，定滑轮 D 及绳的质量可忽略不计，绳不可伸长。要使 B, C 相对 A 为静止，应用多大的力 F 推动整个装置？

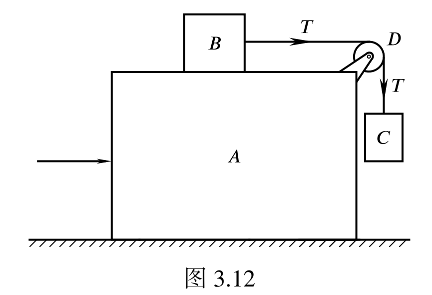


图 3.12

解 整个装置及 C, B 的牛顿方程分别为

$$F = (m_A + m_B + m_C)a$$

$$T - m_Cg = 0$$

$$T = m_Ba$$

求解得到
$$F = (m_A + m_B + m_C)\frac{m_C}{m_B}g$$

其中 m_A, m_B, m_C 相应为 A, B, C 的质量。

【例 4】 对于图3.13(a)表示的体系，劈形物固定，两侧面光滑。若 $m_1 = 80$ 克，$m_2 = 100$ 克，绳及定滑轮质量都可以忽略，绳也不可伸长。求

(1) 绳中张力 T 及两物体的加速度。

(2) 两物体自静止开始运动后第二秒末绳忽然断掉，求绳断后再过多久，又开始下滑？

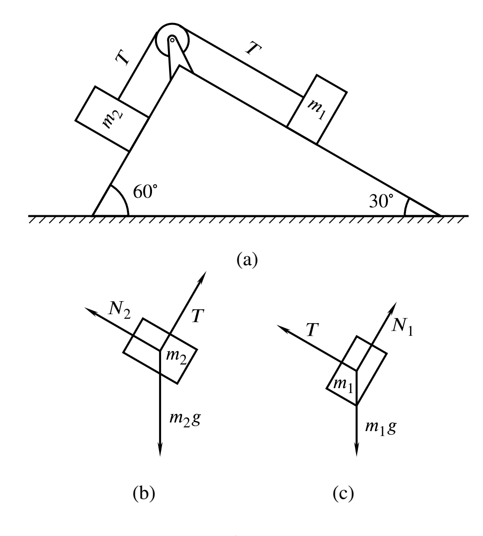


图 3.13

解 m_1, m_2 各受三个力，即重力，斜面支持力及绳子的张力〔图3.13(b)及(c)〕。

(1) m_1 及 m_2 在运动方向上相应的牛顿第二定律表达式为

$$T - m_1 g \sin 30^\circ = m_1 a$$

$$m_2 g \sin 60^\circ - T = m_2 a$$

求解得到

$$a = \frac{m_2 \sin 60^\circ - m_1 \sin 30^\circ}{m_1 + m_2} g = 2.53 \text{ 米/秒}^2$$

$$T = m_1 g \sin 30^\circ - m_1 a = 5.95 \times 10^4 \text{ 达因}$$

(2) 第二秒末的速度为

$$v = a \times 2 = 2.53 \times 2 = 5.06 \text{ 米/秒}$$

绳断后，依靠惯性还要继续以匀减速度向上运动，直减至速度为零才开始下滑。因减速度大小为 $g\sin 30°$ 故向上运动的时间为

$$t = \frac{v}{g\sin 30°} = 1.03 \text{ 秒}$$

【例 5】 一固定于桌面上的斜面 (图3.14(a))，其中 $AB = 130$ 厘米，$AC = 50$ 厘米，滑块 $m_1 = 200$ 克，$m_2 = 60$ 克，静置在斜面上。两滑块间的静摩擦系数 $\mu_0 = 0.50$ ，m_2 与斜面间的滑动摩擦系数 $\mu = 0.33$，用平行于斜面的力 F 向上拉 m_2。求：

(1) 当 m_1 开始在 m_2 上滑动时，m_2 的加速度等于多少？

(2) 上述滑动开始时的 F 等于多少？

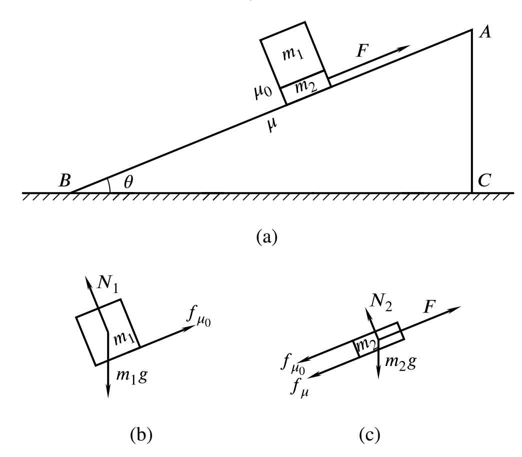


图 3.14

解 m_1，m_2 的受力情况如图3.14(b)、(c)所示。

(1) 由几何关系有 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 120$ 厘米，$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$，$\sin\theta = \dfrac{5}{13}$。$m_1$ 可能得到的最大向前牵引力是最大静摩擦力 f_{μ_0}，即

$$f_{\mu_0} = \mu_0 m_1 g \cos\theta$$

m_1 刚刚开始在 m_2 上滑动的状态，相当于在牵引力 f_{μ_0} 的作用下，它与 m_2 的加速度尚能维持相同的情况，即 m_1 应满足下列方程：

$$\mu_0 m_1 g \cos\theta - m_1 g \sin\theta = m_1 a_2$$

代入有关数据，得到

$$a_2 = \frac{\mu_0 m_1 g \cos\theta - m_1 g \sin\theta}{m_1} = 0.75 \text{ 米/秒}^2$$

(2) 由图3.14(c)，知

$$f_{\mu_0} = \mu_0 m_1 g \cos\theta$$

$$f_{\mu} = \mu\left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta$$

在 F 方向上的牛顿方程为

$$F - \mu\left(m_1 + m_2\right) g \cos\theta - \mu_0 m_1 g \cos\theta = m_2 a_2$$

求解得到

$$F = 1.96 \text{ 牛顿}$$

【例 6】 一条绳以 $\Delta\theta \ll 1$ 弧度的偏转角擦过一固定圆柱的表面，绳垂直于柱的母线，横断面如图3.15 所示。设绳与圆柱间的静摩擦系数为 μ，若绳一端 A 的张力为 T，另一端 B 的张力为 $T + \Delta T$。绳子刚刚要向 B 端滑动，这时的 ΔT 等于多少？

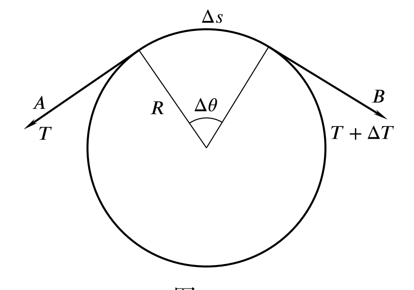


图 3.15

解 考察绳段 Δs 的受力及运动情况，把它的运动分解为切向与法向。

在切向上所受的力为指向 B 的 $T + \Delta T$ 及指向 A 的 T，柱给绳的摩擦力 μP 指向 A，其中 P 是 Δs 给柱的正压力所以，由牛

顿第二定律，有

$$T + \Delta T - T - \mu P = 0$$

或 $$\Delta T = \mu P$$

在法向上,所受的力有向心的是 $(T+\Delta T)_{\mathbf{r}} = (T+\Delta T)\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx T\dfrac{\Delta\theta}{2}$ 及 $(T)_{\mathbf{r}} = T\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} \approx T\dfrac{\Delta\theta}{2}$，还有离心的是柱给绳 Δs 的力 P。所以，牛顿方程为

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{r}} &= \sum_i F_{n_i} \\ &= (T+\Delta T)_{\mathbf{r}} + (T)_{\mathbf{r}} - P \\ &= \Delta m \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

其中 Δm 为 Δs 的质量，因为绳 Δs 尚未滑动，所以，$v \approx 0$。因此得

$$(T+\Delta T)_{\mathbf{r}} + (T)_{\mathbf{r}} - P = 0$$

即 $$T\Delta\theta - \frac{\Delta T}{\mu} = 0$$

或者 $$\Delta T = \mu T\Delta\theta$$

在 $\Delta\theta \to 0$ 的极限下，可得到

$$\mathrm{d}T = \mu T\,\mathrm{d}\theta$$

【例 7】　如图3.16所示，ABC 是质量为 M 的劈形物体，高为 h，静止放在光滑的水平面上，斜面 AC 的倾角为 θ，顶端 A 放一质量为 m 的小物体，自静止向下滑动，略去各面之间的摩擦。试求：

(1) m 从斜面顶端滑到底时，M 的位移；

(2) m 下滑时，M 对地面的加速度 a_1；

(3) m 对 M 的加速度 a_2'；

(4) m 对地面的加速度 a_2；

(5) m 与 M 之间的作用力 N；

(6) M 与桌面之间的正压力 R。

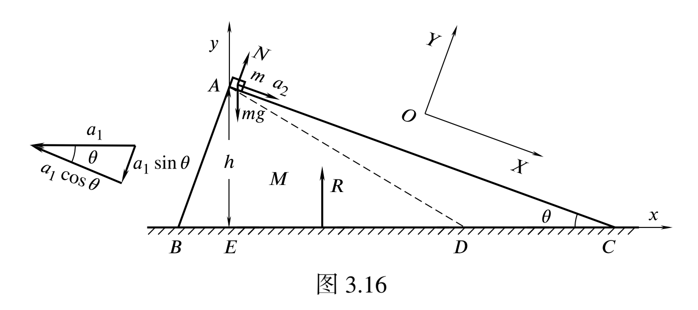


图 3.16

解 此题可有许多解法，下面我们只用惯性系中的牛顿第二定律的基本方程求解。有了非惯性系知识 (下一章) 后，可以用非惯性系方法再解一遍。

(1) m 的实际轨道是虚线 AD，ED 为 m 的水平位移，CD 是 M 的水平位移。m 所受的力是 mg 及 N，M 所受的力是 Mg，$-N$ 及 R。因此，在水平方向，m 与 M 的牛顿方程为

$$N\sin\theta = ma_{2\text{水平}}$$

$$N\sin\theta = Ma_1$$

由上两式得

$$\frac{CD}{ED} = \frac{a_1}{a_{2\text{水平}}} = \frac{m}{M}$$

考虑到几何关系 $h = AC\cdot\sin\theta = BC\cdot\text{tg}\,\theta$，上式成为

$$h = (ED + DC)\,\text{tg}\,\theta$$

$$= \left(\frac{M}{m} + 1\right) DC\cdot\text{tg}\,\theta$$

因此当 m 落到底时，M 走过的距离为

$$DC = \frac{hm}{M+m}\,\text{ctg}\,\theta$$

(2) 由图3.16，我们采用惯性系 xEy，利用加速度合成公式

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2'$$

由此，可得到下列 m 的牛顿方程

$$N\sin\theta = ma_{2水平} = m\left(a_2'\cos\theta - a_1\right)$$

$$mg - N\cos\theta = ma_2'\sin\theta$$

M 的牛顿方程是

$$N\sin\theta = Ma_1$$

求解上述三个方程就得到

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\mathbf{i}$$

式中为 x 轴的单位矢量。也可以用图3.16 中的 XOY 惯性系，则 M 及 m 的方程分别为

$$N\sin\theta = Ma_1$$

$$g\cos\theta - N = ma_1\sin\theta$$

求解后同样得到上述的 a_1 的表达式。

(3) 利用上述 $\mathbf{a}_1$ 表达式，即可求出如下

$$a_2' = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

它就是 m 相对于 M 的加速度。

(4) m 对地面的加速度是

$$a_2 = \left(a_2'\cos\theta - a_1\right)\mathbf{i} - a_2'\sin\theta\mathbf{j}$$

$$= \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g\mathbf{i} - \frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g\mathbf{j}$$

(5) m 与 M 之间的作用力 N 为

$$N = \frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

(6) 考虑 M 在 y 方向的力的平衡，即得 M 与桌面之间的正压力 R 为

$$R = Mg + N\cos\theta = \frac{M(M+m)}{M+m\sin^2\theta}g$$

应当注意，当整个系统 $(M+m)$ 在 y 方向有加速度时，桌面给体系的压力不再是 $(M+m)g$，而是 R 与 $(M+m)g$ 之差提供了体系在 y 方向的加速度。

思　考　题

1. 分析下述各种情况下物体受到的力以及这些力的反作用力(图3.17)。

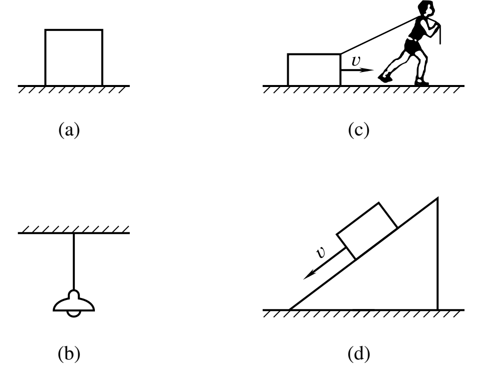


图 3.17

(a) 静止在地面上的木箱；

(b) 悬挂着的电灯；

(c) 粗糙地面上被拖着走的重物；

(d) 沿固定的粗糙斜面下滑的物件。

2. 物体所受的摩擦力的方向是否一定与它的运动方向相反？

3. 木箱放在地面或斜面上，说明摩擦力的大小和方向。在下列几种情况中 (图3.18)，已知木箱质量为 M，与地面或斜面间的静摩擦系数为 μ_0，滑动摩擦系数为 μ，斜面倾角为 α。

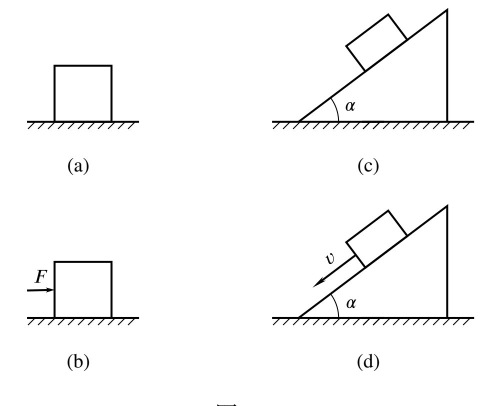


图 3.18

(a) 静止在地面上

(b) 用水平力 $\boldsymbol{F}$ 推地面上的木箱，木箱不动；

(c) 静止在固定的斜面上；

(d) 固定的斜面上下滑。

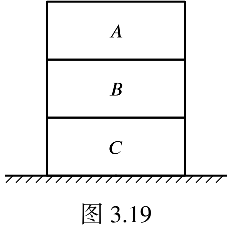


图 3.19

4. 如图3.19 所示，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 三块砖叠在一起，放在水平地面上不动，质量分别为 m_A，m_B，m_C，分析这三块砖所受到的力。

5. 两个力的合力是否一定比其中任一个大？

6. 同一重物用两根等长的绳悬挂起来，采取不同的角度，分别如图3.20 所示，哪一种情况绳所受的拉力最大？哪种最小？

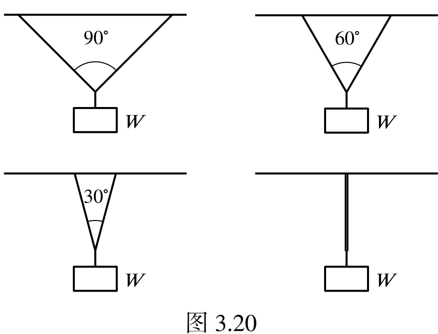


图 3.20

7. 自由下落的物体，在下列几种情况下，加速度如何?

(1) 不考虑空气的阻力；

(2) 考虑空气的阻力，但认为阻力的大小为恒量

(3) 考虑空气的阻力，认为阻力的大小与速度大小成正比。

8. 马拉车，车也拉马。根据牛顿第三定律，作用力与反作用力大小相等、方向相反，那么，为什么车及马整个体系能向前走?

9. 电梯中有质量为 m 的物体，求下述各种情况中物体对电梯底部的压力：

(1) 电梯静止；

(2) 电梯匀速上升；

(3) 电梯以加速度 a 上升；

(4) 电梯以加速度 a 下降。

10. 现在我们知道，物质表面的磨光程度有一个限度，如果超过这一限度，反而增加摩擦阻力。试解释这一事实。

11. 在光滑的冰上走路，用小步还是用大步走好? 为什么?

12. 一个人静止在结冰的湖面上，如果冰面是完全光滑的 (即人与冰面之间没有摩擦力)。试问他怎样才能到达岸上?

13. 一轻绳跨过一个定滑轮，绳的两端各被一个猴子抓住。这两个猴子重量相等。开始时处在同一高度，试考虑：

(1) 猴子甲能否往上爬而将猴子乙丢在比自己低的高度上?

(2) 猴子甲能否沿着绳往下滑而将猴子乙留在比自己高的高度上?

(3) 猴子甲放开绳子，能否比猴子乙早落到地上?

14. 如果取力、长度、时间为基本量，则质量的量纲是什么?

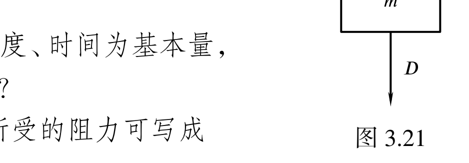


图 3.21

15. 物体运动时所受的阻力可写成

$$F = \beta v^n$$

其中 F 是阻力；v 是速度；n 为某个数。在低速时 $n=1$，β 是一个常数。试求 β 的量纲。

16. 如图3.21 所示，用一弦线将质量为 m 的物体挂在天花板上，再用同样质地的弦线 D 系在 m 下面。试说明以下事实

(1) 如果突然向下扯 D，D 就断；

(2) 如果慢慢地向下扯 D，则 C 先断。

习　　题

1. 5.0 公斤的物体放在地面上，若物体与地面之间的摩擦系数是 0.30，至少要多大的力才能拉动该物?

2. 一个 5.0 吨的空车箱能使车箱底下的弹簧压缩 1.0 厘米。如果在载货后弹簧压缩 4.0 厘米，求货的质量。

3. 两人拉纤使船前进，两纤绳互成直角，他们分别用力 20 公斤和 15 公斤 (图3.22)，求使船前进的合力。

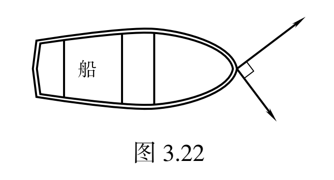


图 3.22

4. 质量为 1.3×10^4 公斤的火箭上升时，向上的推力为 2.6×10^5 牛顿，试求它的加速度。

5. 一车的质量为 2.85×10^5 公斤，当车以 30 公里/小时的速度行驶时，作紧急刹车。已知制动阻力是车重的 0.6 倍，求刹车距离 (即刹车后所走的距离)。

6. 在电梯中放一磅秤，一个 50 公斤的人站在磅秤上。求:

(1) 当电梯匀速上升或下降时，磅秤指示是多少?

(2) 当电梯以 4.9 米/秒 2 的加速度上升或下降时，磅秤的指示各为多少?

7. 如图3.23 所示，用定滑轮将质量为 m 的重物送往高处，人的质量为 M，绳不可伸长，绳的质量及它与滑轮的摩擦可忽略。

当物体 m 以匀速上升及以加速度 a 上升时，人对地面的压力各是多少？

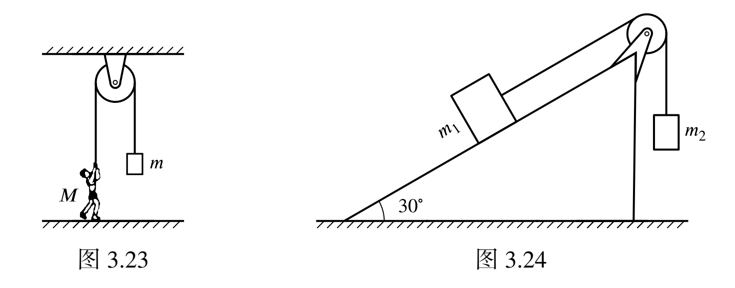


图 3.23　　图 3.24

8. 如图3.24所示，已知 $m_1 = 3.0$ 公斤，$m_2 = 2.0$ 公斤，试求

(1) 每一物体的加速度；

(2) m_2 受到的绳子拉力。

9. 图3.25的装置可用来测物体 A 与桌面间的摩擦系数 μ。设已知 A，B 的质量分别是 m_A 和 m_B，它们的加速度是 a，试导出摩擦系数的表达式。

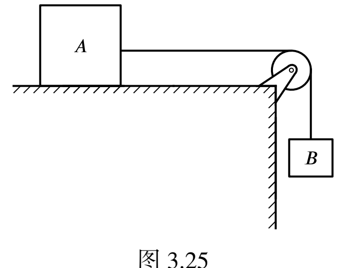


图 3.25

10. 两人分别将一小车以同样的加速度推上坡，一人的推力方向与斜面平行，以 F_1 表示；另一人的推力方向与水平面平行，以 F_2 表示。设车与斜面的摩擦系数 μ 及斜面的倾角 α 已知，求两人推力之比。

11. 用起重机吊起一个 4 吨重的物件，吊索最多可承受 5.0 吨的拉力，吊索本身重量可不计，求在下列各情况中吊索所承受的拉力：

(1) 物件吊在空中静止；

(2) 物件以 25 厘米/秒的速度匀速上升；

(3) 物件以 80 厘米/秒的速度匀速下降；

(4) 物件由静止匀加速上升，在 0.5 秒内速度增加到 20 厘米/秒；

(5) 物件由 40 厘米/秒的速度开始匀加速下降，0.5 秒内增加到 80 厘米/秒；

(6) 要使吊索不断，物体向上的最大加速度是多少？

12. 质量 $m_1 = 300$ 克的物体与 $m_2 = 200$ 克的物体通过定滑轮用绳连接起来 (图3.26)。物与水平桌面间摩擦系数 $\mu = 0.25$，桌子不动，绳长不变，绳的质量及绳与滑轮的摩擦可略去。这系统的加速度是多少？绳的张力是多少？若互换 m_1 与 m_2，有无影响？

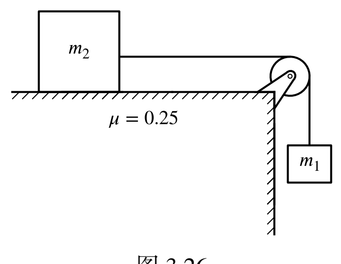


图 3.26

13. 将质量分别为 m_1，m_2，m_3 和 m 的四个物体连接 (图3.27) 桌面与这些物体之间的摩擦系数都是 μ。设绳长不变，桌子与滑轮位置不变，绳子的质量及绳与滑轮间的摩擦可忽略不计。求这系统的加速度以及各物体之间的张力 T_1，T_2，T_3。

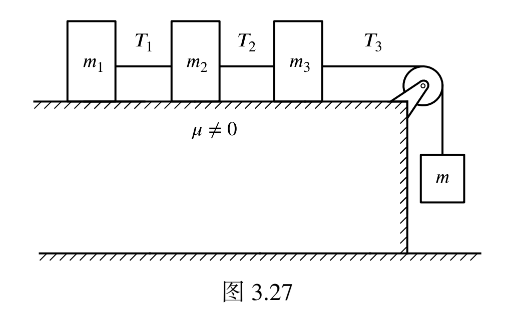


图 3.27

14. 质量分别为 m_1，m_2 和 m_3 的三个物体 ($m_2 > m_1$)，用绳子按图3.28 所示连接。A 和 B 是两个轻滑轮。设斜面和滑轮位置不变，绳长不变，略去摩擦力和绳子的质量。求系统的加速度 a 和

绳中的张力 T_1，T_2；A 点承受的力；绳 d 上的张力。

15. 一个学生要确定一个盒子与一块平板之间的静摩擦系数 μ_0 及滑动摩擦系数 μ。他把盒子放在平板上，渐渐抬高板的一端，当板的倾角 (即板与水平之夹角) 达 30° 时，盒子开始滑动，并恰好在 4.0 秒内滑下 4.0 米距离。试由这些数据确定 μ_0 及 μ。

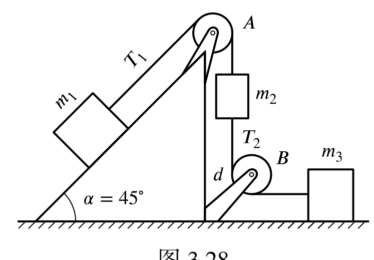


图 3.28

16. 如图3.29，质量为 M 的三角形斜面上放一个小质量物体 m，三角形物体放在水平面上，假设所有接触都是光滑的。求：

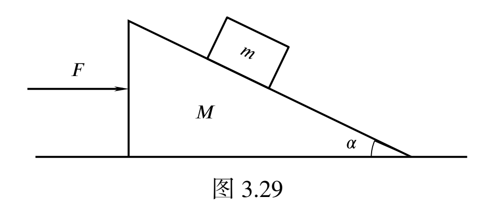


图 3.29

(1) 必须用多大的水平推力 F，才能使 m 相对于 M 为静止？

(2) 此时系统的加速度 a 有多大？

17. 收尾速度问题。空气对物体的阻力由许多因素决定。然而，一个有用的近似公式是，阻力 $\mathbf{f}_p = -\beta\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是物体的速度，β 是一个与速度无关的常数。现在考虑空气中的一个自由下落物体，将 Z 轴的正方向取为竖直向下。

(1) 给出落体的牛顿方程。

(2) 当物体的速度 $v(t_0)$ 等于多少时，物体不再加速 (这个速度叫做收尾速度)？

(3) 试证，速度随时间变化的关系为：

$$v(t) = v(t_0)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$

并作出 v-t 曲线。

(4) 定性地画出这种运动的 z-t 图及 a-t 图。

18. 升降机中固定着一个倾角为 θ 的光滑斜面，一小物体沿着斜面下。在以下几种情况下，求物体相对于斜面的加速度。

(1) 升降机以恒定速率 v 下降；

(2) 升降机以恒定速率 v 上升；

(3) 升降机以加速度 a 下降；

(4) 升降机以减速度 a 下降；

(5) 升降机的吊缆拉断；

(6) 在情况 (3) 中，斜面与物体间的作用力多大？

19. 质量分别为 M 和 $M+m$ 的两个人，分别拉住定滑轮两边的绳子往上爬 (图3.30)。开始时两人与滑轮的距离都是 h。设滑轮和绳子的质量以及定滑轮轴承处的摩擦力均可不计，绳长不变。试证明，如果质量轻的人在 t 秒种爬到滑轮，这时质量重的人与滑轮的距离为

$$\frac{m}{M+m}\left(h+\frac{1}{2}gt^2\right)$$

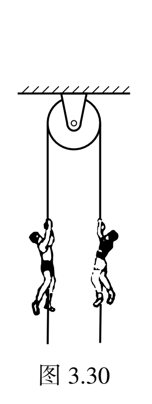


图 3.30

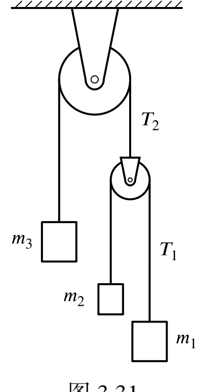


图 3.31

20. 一动滑轮与一定滑轮连接 (图3.31)，已知 $m_1=400$ 克，$m_2=200$ 克，$m_3=400$ 克，略去摩擦及动滑轮的质量，设绳长不变，绳的质量可不计。求每个物体的加速度及各绳中的张力。

21. 质量为 $m_1 = 10$ 公斤和 $m_2 = 20$ 公斤的两物体，用轻弹簧连接在一起水平放在光滑桌面上，以 $F = 200$ 牛顿的力沿弹簧方向作用于 m_2，使 m_1 得到加速度 $a_1 = 120$ 厘米/秒^2，m_2 的加速度 a_2 应是多少？

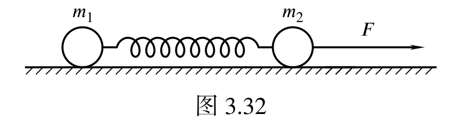


图 3.32

22. 假使汽车能以速率 $v = 100$ 公里/小时驶过半径 $R = 200$ 米的水平弯道，车胎与地面间的摩擦系数至少要多大？

23. 如图3.33所示，一长为 L、质量为 M 的均匀链条，套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上。当链条在圆锥面上静止时，链条中的张力是多少？

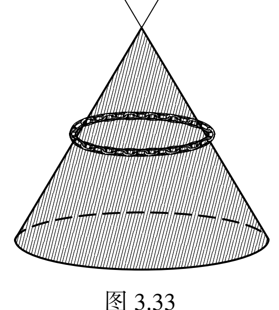


图 3.33

24. 长为 $l = 40$ 厘米的绳，一端固定于一点 O，另一端系一质量 $m = 100$ 克的小球，绳不可伸长，其质量可忽略。让小球在铅直平面作圆周运动。问：

(1) 小球通过最高点时，若绳的张力为零，小球的速度 v_0 为多少？

(2) 若小球通过最高点时的速度为 $2v_0$，绳中的张力 T 是多少？

25. 如图3.34 所示，一细绳穿过光滑的、不动的细管，两端分别拴着质量为 m 和 M 的小球。当小球 m 绕管子的几何轴转动时，m 到管口的绳长为 l，与竖直的细管夹角为 θ。细管半径可以忽略，求小球的速度和它所受的向心力；并证明：$\cos\theta = \dfrac{m}{M}$；以及小球的转动周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{Mg}}$。

26. 一个质量为 m 的小物体放在碗内，设碗的内表面是球形的光滑面。当碗以匀角速度绕通过球心的竖直轴转动时，A 在什么高度才有可能紧贴碗壁随碗一起转动？若一开始 A 在碗底又将怎样？

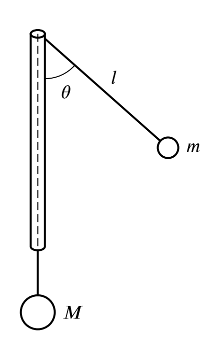


图 3.34

27. 顶角为 θ 的圆锥形漏斗垂直于水平面放置 (图3.35)，漏斗内有一质量为 m 的小物体，m 距漏斗底的高度为 h。问：

(1) 如果 m 与锥面间无摩擦，要使 m 停留在 h 高度随锥面一起绕其几何轴以匀角速度转动，m 的速率应是多少？

(2) 如果 m 与锥面间的摩擦系数为 μ，要使 m 稳定在高度随锥面一起以匀角速度转动，但可以有向上或向下运动的趋势，则 m 的速率范围是什么？

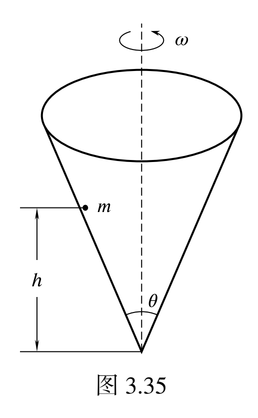


图 3.35

28. 一汽车驶过一半径为 R 的水平弯道，路面倾角为 θ(图3.36)，车轮与路面间的摩擦系数为 μ。求汽车在弯道上不侧滑的速率范围，若超出此范围，车会怎样？

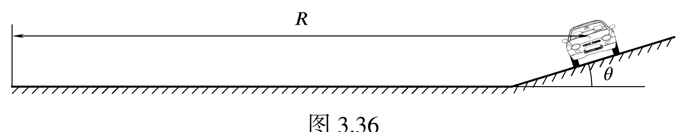


图 3.36

29. 一根重量为 W 的均匀的绳子，悬结于两根竖直于地面上的杆之间，绳子两端的高度一样，并分别与杆成 θ 角，求

(1) 绳子任一端处的张力；

(2) 绳子中点的张力。

30. 把一段单位长度的质量为 λ 的绳子 AB 挂在平置的光滑

圆木上，A 端固定在圆木的最高点，绳长等于该圆木的 1/4 周长 (图3.37)，圆木半径为 R。

(1) 画出 θ 与 $\theta+\Delta\theta$ 之间这小段绳子的受力图，求出绳中张力 $T(\theta)$ 的表达式；并证明，绳子上端的张力为 $T_A=\lambda Rg$；

(2) 写出圆木作用在 θ 与 $\theta+\Delta\theta$ 之间小段绳子上的法向力 N 的表达式。对这个力的水平分量求积分 (对整段绳子)，并说明结果的物理意义。

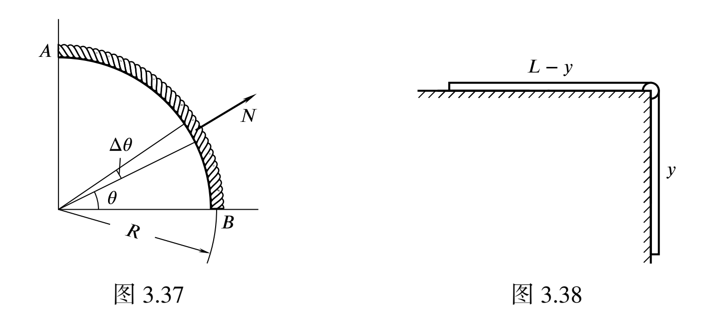


图 3.37　　图 3.38

31. 一长为 L，质量为 M 的均匀电缆，静止放在光滑的桌面上，一端伸出桌的边沿 (图3.38)，在桌边沿处有一可忽略摩擦的小滑轮，因此，滑轮两边的张力恰好相等。根据定义，电缆两自由端的张力为零。

(1) 当长为 y 的一段伸出桌的边沿时，电缆的加速度 a 是多少？

(2) 假使长度为 y_0 的一段电缆伸出桌的边沿时，放手让电缆由静止开始自由运动，给出 $y(t)$。

32. 一周长为 l，质量为 M 的圆环，绕圆心以匀角速度 ω 在水平面内转动，求圆环上的张力 T。

33. 一质量为 m 的小物体，由两根长为 l 的细绳拴在一竖直的转轴上 (图3.39) 当轴和物体都以匀角速度 ω 转动时，两根绳子与轴都成 45° 角。

(1) 画出物体的受力图；

(2) 分别求出两根绳子中的张力 T_1 及 T_2。

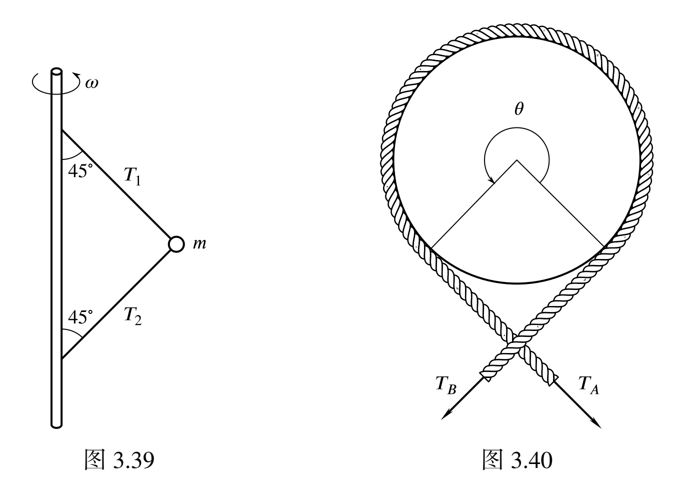


图 3.39　　　　图 3.40

34. 一种在船上使用的称为绞盘的装置，用来控制在巨大张力作用下的绳。绳索绕在绞行的固定圆柱上，通常绕若干匝 (图 3.40)。绳子一端承受巨大的拉力 T_B，而海员却可以小得多的力 T_A 拽住绳子的另一端。设绳子与圆柱表面的摩擦系数为 μ，绳子绕圆柱的角度为 θ，求绞盘不动时 T_A/T_B。

〔提示：参见例题 6 的结果，对 θ 进行积分。〕

35. 一质量为 M 的斜面静止在粗糙的地板上 (图3.41)。斜面上端有一光滑而轻的小滑轮，一绳跨过滑轮吊住一质量为 m_1 的物体，绳的另一端拴住质量为 m_2 的物体，m_2 在斜面上无摩擦地滑动，斜面与地板夹角为 θ，试求：

(1) M，m_1，m_2 各物体所受的力；

(2) 假定斜面静止，写出系统的牛顿方程，并求 m_1，m_2 的加速度及绳中之张力；

(3) 若要斜面保持静止，斜面与水平面间的摩擦系数至少要多

少？

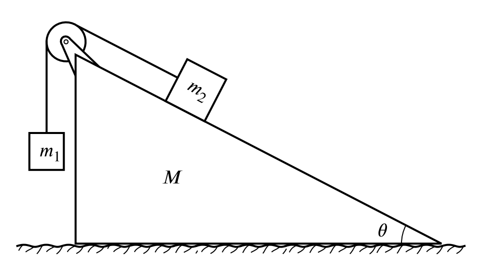


图 3.41

36. 一小木块放在倾角为 θ 的斜面上 (图3.42)，木块与斜面间的静摩擦系数为 μ。设 $\mathrm{tg}\,\theta > \mu$。若给斜面一个水平加速度 a，又要木块在斜面上保持相对静止，求 a 的可能范围。

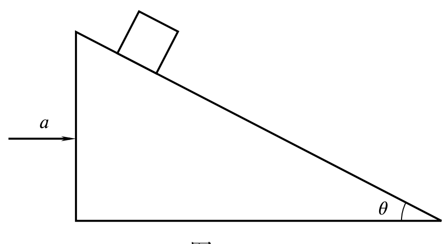


图 3.42

37. 一车以速率 v 通过半径为 R 的圆形拱桥 (图3.43)。汽车质量为 m，不计摩擦，桥所受到的压力是多少？如果桥是凹形的又怎样？

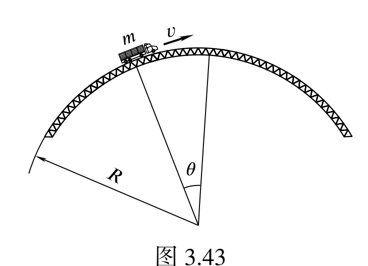


图 3.43

第四章

万 有 引 力

4.1 开普勒的行星运动三定律

牛顿第二定律（式(3.2.1)）是物体运动的动力学基本规律。然而，如果没有关于力的详细知识，这个规律是不能应用的。在这个意义上，我们可以说牛顿第二定律的含义是：研究物体的动力学的关键是研究物体之间的相互作用力。牛顿在《原理》一书中曾写道："我奉献这一作品，作为哲学的数学原理，因为哲学的全部责任似乎在于——从运动的现象去研究自然界中的力，然后从这些力去说明现象。"

牛顿使用"从运动的现象去研究力，从力去说明现象"的方法建立了万有引力定律。

在牛顿之前，人类研究得最多也最清楚的运动现象就是行星的运行。肉眼可以看到五颗行星：水、金、火、木、土。对这五颗行星的运动有过长期的观察，特别是丹麦天文学家第谷连续进行了二十年的仔细观测，他的学生开普勒则花费了大约二十年的时间分析这些数据。开普勒前后总结出三条行星运动的规律：

(1) 所有行星都沿着椭圆轨道运行，太阳则位于这些椭圆的一个焦点上。这称为轨道定律。

(2) 任何行星到太阳的连线在相同的时间内扫过相同的面积。这称为面积定律

(3) 任何行星绕太阳运动的周期的平方与该行星的椭圆轨道

的半长轴的立方成正比，即

$$T \propto r^{3/2} \tag{4.1.1}$$

式中，T 是行星运动的周期；r 是椭圆轨道的半长轴。这称为周期定律。

表4.1 中给出了九个大行星的有关数据。其中是以 AU 为单位的，AU 是地球轨道的半长轴，称为天文单位，其值是

$$1\text{AU} = 149.6 \times 10^8 \text{ 公里}$$

图4.1 画出了 $\ln T$ 与 $\ln r$ 之间的关系。它是一条直线，斜率为 3/2，就是式(4.1.1) 的图示。

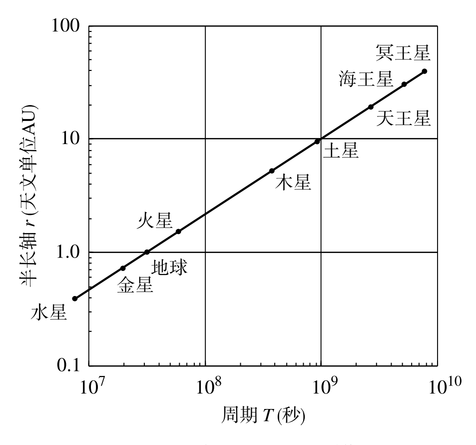


图 4.1　行星的 T-r 周期

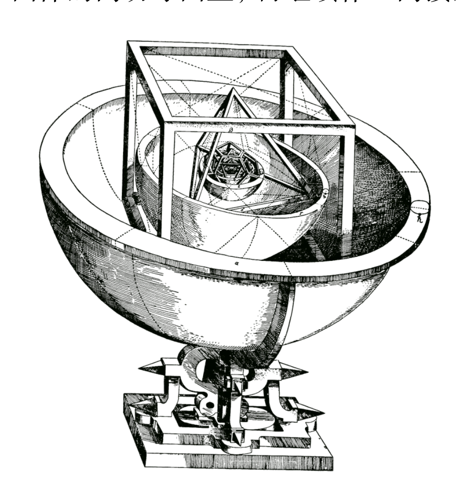
根据行星运动的这三条规律，牛顿得出了万有引力。在讲万有引力之前，我们要说明，“从运动现象去研究力”这种方法并不是唯一的。

开普勒本人在得到上述的行星运动的规律之后，也曾企图寻找运动的原因，来解释行星运动的现象。但是他并不着眼于力，而是着眼于对称性。开普勒首先要解释行星半长轴为什么有表 4.1所列出的值。他认为这是宇宙的对称和和谐的表现。他设计了一个

表 4.1　行星的周期和轨道半长轴的值

行　星	r(AU)	T(日)
水　星	0.387 099	87.969
金　星	0.723 332	224.701
地　球	1.000 000	365.256
火　星	1.523 691	686.980
木　星	5.202 803	4332.589
土　星	9.538 84	10 759.22
天王星	19.1819	30 685.4
海王星	30.0578	60 189
冥王星	39.44	90 465

由正多面体构成的宇宙。如图4.2所示，土星的轨道在最外的一个大圆上；在该球内作一内接的正六面体，木星轨道在该六面体的内切球面上在这球内再作一正四面体，火星轨道则在该四面体的内切球面上；相继地，再在这球面内作一内接正十二面体，地球轨道在这十二面体的内切球面上；再继续作一内接的正二十面体，



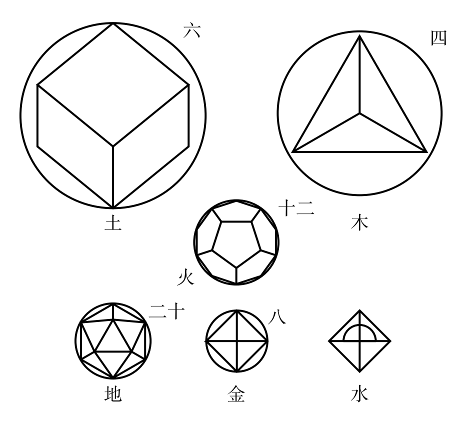


图 4.2　开普勒的宇宙模型

金星轨道就在二十面体的内切球面上；最后，作内接的正八面体，其内切球面就是水星的轨道所在之处。

我们知道，正多面体的种类是不多的，用上述的一系列正多面体的套装，开普勒能给出符合观测的行星轨道半径之间的比例，不能不说这是一个很有意义的尝试。虽然现在已经证明，开普勒的解释并不正确，但是这个事例告诉我们，“从运动的现象去研究对称性”，也是一种有价值的方法。的确，在一些现代物理的研究中往往是首先着眼于对称性的。

4.2　万有引力规律的建立

在牛顿之前，已经有物体之间存在引力的观念，也有太阳的引力决定行星运动的观念。但是怎样定量的描写引力？太阳引力如何决定行星的运动？等等，都是不清楚的。

牛顿首先把他的动力学基本方程(3.2.1)作为力的定义，来研究导致开普勒三定律的力应是怎样的。

为了简便，可把行星轨道看作圆形。这样，根据面积定律，行

星应作匀速圆周运动，只有向心加速度

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{4.2.1}$$

其中 v 是行星的速率；r 是圆轨道的半径。根据开普勒第三定律〔式(4.1.1)〕

$$T \propto r^{\frac{3}{2}}$$

又注意到 $v = \frac{2\pi r}{T}$，故有

$$v \propto \frac{r}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \tag{4.2.2}$$

将上式代入式(4.2.1)，得

$$a \propto \frac{1}{r^2} \tag{4.2.3}$$

或

$$F = ma \propto \frac{m}{r^2}$$

其中 m 是行星的质量。取比例系数为 α，则得

$$F = m\frac{\alpha}{r^2} \tag{4.2.4}$$

显然，α 应取决于太阳的性质。由此，牛顿得到第一个重要结果：如果太阳引力是行星运动的原因，则这种力应和 r 的平方成反比。

在牛顿之前，也在人提出过引力应遵循平方反比律，但那并不是基于力的明确定义而得到的，只是一种猜测，或者是与几何类比而推出。在牛顿体系中，力具有定量的定义，再由运动学规律及太阳是行星运动原因的模型，平方反比律就是必然的结论了。

进一步，牛顿认为这种引力是万有的、普适的、统一的，即所有物体之间都存在这种引力作用，称之为万有引力。这一步是关键性的。我们一再强调，寻找各种不同运动的统一原因，是物理学的追求，引力的万有性就是基于这种统一观的一种猜测。

如何来检验这一猜测呢？既然引力是普适的，那么，地球和月亮之间也应当存在这类力，月亮之所以绕地球运动，应当是地球施于月亮的吸引力，就象太阳有吸引行星的力那样，即地球对月亮的吸引力也应当有式(4.2.4)的形式，即

$$F_{地\to月} = m_{月}\frac{\alpha'}{l^2} \tag{4.2.5}$$

显然，其中 α' 应不同于式(4.2.4)中的 α，因为 α 标志太阳的性质，而 α' 应标志地球的性质。另外，在式(4.2.5)中，$m_{月}$ 是月亮的质量，l 是地球到月亮的距离。这时，月亮的加速度可表示为

$$a_{月} = \frac{F_{地\to月}}{m_{月}} = \frac{\alpha'}{l^2} \tag{4.2.6}$$

这里，是把动力学基本方程(3.2.1)作为定律来使用。

另一方面，由式(4.2.5)，地球对地面上落体的引力应是

$$F = m\frac{\alpha'}{R^2} \tag{4.2.7}$$

其中，m 是落体的质量，R 是地球半径。由此，落体的加速度 g 为

$$g = \frac{\alpha'}{R^2} \tag{4.2.8}$$

从式(4.2.6)及式(4.2.8)，得

$$l = R\sqrt{\frac{g}{a_{月}}} \tag{4.2.9}$$

又 $$a_{月} = \frac{v^2}{l} \qquad v = \frac{2\pi l}{T}$$

其中，v 是月亮的速率；T 是月亮运动周期。将上式代入式(4.2.8)并整理，得到

$$l^3 = \frac{1}{4\pi^2}R^2gT^2 \tag{4.2.10}$$

式(4.2.10)就是从引力普适性得出的预言。在这个关系式中，所有量都是可测量的，因此，可以用实验加以检验。其中有关量的数值为

$$R \approx 6400\text{公里}$$

$$g = 9.8\text{米/秒}^2$$

$$T = 27\text{天}8\text{小时}$$

$$l = 3.84 \times 10^5\text{公里}$$

这些测量结果能很好地满足式(4.2.10)，这就验证了万有引力的假设的正确性。

早在 1665 年，牛顿就得到了式(4.2.10)，但用当时的测量数据，牛顿发现它们并不满足式(4.2.10)。因而，牛顿并没有及时发表他的成果。直到后来，天文学家重新测定了地球半径，发现以前的观测值错了。牛顿用新的数据再进行计算，所得结果完全符合式(4.2.10) 。这可能是牛顿推迟发表他的万有引力理论的一个原因。

牛顿的上述论证说明，地上物体的运动规律与月亮运动的规律实质上是一样的。这个结果的意义很重大，它打破了亚里士多德关于天上运动和地面运动是本质不同的两类运动的基本观念。按照牛顿的理论，天体运动与地面运动之间并无根本的差别，也没有不可渡过的界限。牛顿曾描述过在高山顶上用大炮发射炮弹的运动情形，见图4.3。我们知道，炮弹作抛体运动。按牛顿理论，只要炮弹的初速度足够大，炮弹就能绕地球运动，而不再落回地面，成为地球的卫星。因此落体或抛体运动与地球卫星的运动之间的差别，只不过是初速度不

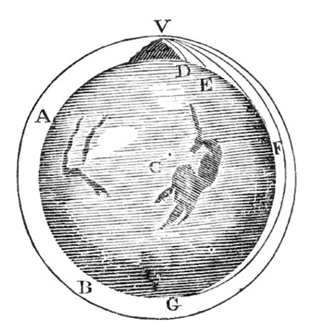


图 4.3　天体运动和地面运动无原则差别

同。今天看来，这些结果已没有什么希奇，因为已经成功地发射了很多人造地球卫星。但在三百多年前，就认为原则上我们可制造天体那样的运动，是一个非常大胆的想法。

上面的讨论我们只利用了开普勒的第二、第三定律，还应当证明万有引力定律式(4.2.4)或式(4.2.5)也符合开普勒的轨道定律。牛顿在 1677 年完成了这个证明，使万有引力理论形成了完整的体系。关于轨道定律的证明，已超出本课程的范围，故不在这里论述这个证明过程了。

牛顿在他的小传中，总结过自己这一段的工作，他说："在 1665 年开始……我从开普勒关于行星的周期是和行星到轨道中心的距离的 3/2 次方成比例的定律，推出了使行星保持在它们的轨道上的力必定和它们与绕行中心之间的距离平方成反比；尔后，把使月球保持在它轨道上所需要的力和地球表面上的重力作了比较，并发现它们近似相等。所有这些发现都是在 1665 和 1666 的鼠疫年代里作出来的……最后在 1676 和 1677 年之间的冬季，我发现了一个命题，那就是——一个行星必然要作一个椭圆形的运动，力心在椭圆的一个焦点上，同时，它所扫过的面积 (从力心算起) 的大小和所用的时间成正比。"从这个总结中，我们可以看到，"从运动现象研究力，再从力去说明其他现象"的完整过程。这种物理的研究方法一直沿用到今天。

4.3 引力常数 G

在上节的讨论中，我们并没有给出式(4.2.5)中的 α' 值。因为在解决这个问题的过程中，最终把 α' 消去了，式(4.2.10)中不含 α'。下面我们来讨论 α' 应是什么。

由式(4.2.5)，地球对月亮的力为

$$F_{地\to月} = m_{月}\frac{\alpha'}{l^2} \tag{4.3.1}$$

反过来，根据万有引力是普适的，月亮对地球的引力应当有如下的形式

$$F_{月\to地} = m_{地}\frac{\alpha''}{l^2} \tag{4.3.2}$$

其中 α'' 是和月亮有关的常数。根据牛顿第三定律，$F_{地\to月}$ 与 $F_{月\to地}$ 大小相等，即

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{m_{地}}{m_{月}}$$

因此，其解为

$$\alpha' = Gm_{地} \qquad \alpha'' = Gm_{月}$$

这样，式(4.3.1)、(4.3.2)两式可统一为

$$F = \frac{Gm_{地}m_{月}}{l^2} \tag{4.3.3}$$

根据引力是普适的观点，任何具有质量 m_1 和 m_2、相距 r 的两个质点之间的引力，总是沿着两质点的连线方向，其大小为

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{4.3.4}$$

式中 G 是对所有质点都具有相同数值的普适常数，称为万有引力常数。这就是牛顿的万有引力定律。

确定万有引力常数 G 的数值，就要测量两个已知质量的物体间的引力。1798 年，卡文迪许作了第一个精确的测量。他用的扭秤如图4.4 所示。其中两个质量均为 m 的小球固定在一轻杆的两端，再用一根细丝将这个杆水平悬挂起来，每个质量 m 附近各放置一个质量为 M 的大球。根据万有引力定律，当大球在位置 A, B 时，由于小球受到吸引力，而对悬杆产生一力矩，使其产生转动。

引力力矩最后被悬丝力矩所平衡。悬丝扭转的角度 θ 可以通过小镜所反射的光来测定。如果已知大球与小球的质量和它们相隔的距离以及悬丝的扭转常数，就可由测得的 θ 值来计算 G。

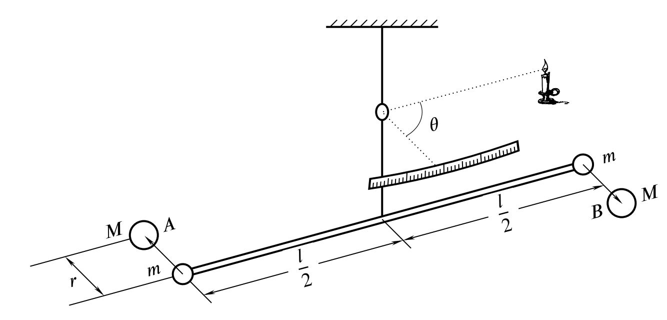


图 4.4　测量引力常数所用的扭秤

还曾用过以下几种方法测量引力常数 G。

1. **天平法**

如果天平两边各有质量 m，达到平衡。若再将一大质量 M 放在某一 m 之下，由于引力的作用将破坏这个平衡，必须将另一端之 m 增加为 $m+\delta m$ 才能保持平衡由 δm 及其他天平参数，即可求出 G。

2. **扭秤周期法**

这种方法的原理是扭秤的摆动周期在引力的作用下会发生变化。如图4.4 所示，若将一个大质量 M 放在横杆方向，则其摆动周期将缩短；若 M 放在垂直于横杆的方向，周期将增加，由周期差别可以确定 G。

3. **扭秤共振法**

在图4.4 中，把两个 M 也作为一扭秤的两端悬挂起来，这样形成两扭摆系统，一个扭摆的质量小 (m)，一个质量大 (M) 。当 M 摆动时，由于引力的作用也将引起 m 摆动。当调节两个摆的周期相同时，m 摆与 M 摆的振幅之比是正比于 G 的。因而，由摆

的振幅即可定出 G。

用这些方法测得的 G 值列于表 4.2 中，从表中看到，从卡文迪许第一个实验以来，已经有近二百年了，但关于 G 值的实验精度进步不大。这是目前测得最不精确的一个物理常数。原因是实验很难做，一方面引力是四种基本相互作用中最弱的一种；另一方面，引力是万有的，不能屏蔽，这就意味着干扰很多，不容易排除。

G 的单位是牛顿 · 米^2/千克^2。关于单位的确定，我们在下节中作些一般的讨论。

表 4.2

作　　　者	年份	方　　　法	$G \times 10^{-11}$ 牛顿 · 米^2/千克^2
Cavendish	1798	扭秤偏转	6.754
Poynting	1891	天平偏转	6.698
Boys	1895	扭秤偏转	6.658
Braun	1895	扭秤偏转和周期	6.658
Heyl	1930	扭秤周期	6.678
Zahradnicek	1933	扭秤共振	6.659
Heyl and Clirzanowski	1942	扭秤周期	6.668
Rose	1969	加速度	6.674

4.4 单位制及量纲

现在我们将已讲过的物理量及其单位列在表4.3 中。在这些物理量中，长度、时间及质量三者都是由规定的标准来作为单位的。而其他所有的量的单位可以根据相应的定义公式，从这三个单位来规定。如，速度的单位是由它的定义式(1.7.2)来规定的，G 的单

位是来自它的定义式

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

我们称长度、质量及时间三个物理量为基本量，它们的单位为基本单位，称其他物理量为导出量，相应的单位为导出单位。

表 4.3

物理量	单位 (SI，MKS)	单位 (CGS)	量　　纲
长　度	米	厘米	L
质　量	千克	克	M
时　间	秒	秒	T
速　度	米/秒	厘米/秒	LT^{-1}
加速度	米/秒^2	厘米/秒^2	LT^{-2}
角速度	弧度/秒	弧度/秒	T^{-1}
力	牛顿	达因	MLT^{-2}
G	牛顿 · 米^2/千克^2	达因 · 厘米^2/克^2	$L^3M^{-1}T^{-2}$

基本单位规定之后，整个一系列单位就被规定了。所以一组基本单位就决定了一个单位制。我们经常采用的单位制，是长度以米为单位，质量以千克 (或叫做公斤) 为单位，时间以秒为单位。这个单位制称为国际单位制 (SI) 或米千克秒制 (MKS)

另一种常用的单位制，是采用厘米为长度单位，克为质量单位，秒为时间单位，称为 CGS 制。1 厘米 = 1/100 米，1 克 = 1/1000 千克。有了这一组基本单位之间的换算关系，导出单位的换算关系也就确定了。例如，在 CGS 制中速度单位与 SI 制中速度单位之间的关系为

$$1\ \text{厘米/秒} = \frac{1}{100}\ \text{米/秒}$$

其他换算关系都可以类似求得。在数值运算中采用的单位制要统

一，不要一个量用这个单位制，另一个量又用那个单位制。

我们把上述讨论更一般化，如果取 L 为长度“单位”，M 为质量“单位”，T 为时间“单位”，则导出量的“单位”也可以用 L, M, T 表示，速度的“单位”就是 $L/T = LT^{-1}$，加速度是 $L/T^2 = LT^{-2}$，每个物理量都对应着一个由 L, M 及 T 所组成的量，这个量我们称为该物理量的量纲，从形式上可以说，物理量的量纲，就是 LMT 制中的“单位”。我们习惯用一个方括号表示括号中的物理量的量纲，如 $[v] = LT^{-1}, [a] = LT^{-2}$。各量的量纲，也列在表4.3中。

量纲很有用，无论是标量的加减运算，或是矢量的和差，所涉及的量都应具有相同的单位，即应有相同的量纲。由此，一个公式两边的量应具有相同的量纲。这个性质，常可以作为判别某些不熟悉的量的量纲的方法。例如，利用式(4.3.4)可以求得 G 的量纲。由于 $[m_1] = [m_2] = M, [r] = L, [F] = MLT^{-2}$，要求式两边的量纲相同，可得：

$$\begin{aligned}[G] &= \frac{[F][R^2]}{[m_1][m_2]} \\ &= \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} \\ &= M^{-1}L^3T^{-2}\end{aligned}$$

弧度是根据圆的弧长与其半径之比来定义的，所以它的量纲是 $L/L = L^0$，即与 M, L, T 均无关。这种量，称为无量纲量摩擦系数也是一个无量纲量。

最后还应指出，可以不取长度、质量及时间三者为基本量，而取另外三个量，如长度、时间及力，其他的量也都可以从长度、时间及力三者导出，这样也可以规定单位制。这时，相当于由长度 L、时间 T 及力 F 作为基本的量纲，其他量的量纲都可以用 L，T 及 F 表示出。选择不同的基本量，同一物理量的量纲就不同。

4.5 几个重要的引力物理量

现在我们再回到引力问题。任何一种相互作用，都决定着一类运动过程。例如，行星的运动、月亮的运动以及落体运动都取决于万有引力。这些运动的特征尺度，主要决定于引力常数，所以它们也可以称为引力物理中的特征量。本节就来讨论一些常见的特征尺度。

所谓第一宇宙速度，就是一个引力物理量。如图4.3，我们已经讨论过当抛体速度达到一定值时，它就会绕地球作匀速圆周运动而不再落回地面，成为地球的卫星。这个速度称为第一宇宙速度。

按第一宇宙速度 v 的定义，当物体达到速率 v 时，它将绕地球作匀速圆周运动。这时，地球和物体之间的距离可用地球半径 R 代替，根据牛顿第二定律和万有引力定律，得

$$\frac{GM_{地}m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = mg$$

其中 $M_{地}$ 是地球的质量，m 是物体的质量，所以

$$v = \sqrt{\frac{GM_{地}}{R}} \quad 或 \quad v = \sqrt{Rg} \tag{4.5.1}$$

用 $R \approx 6400$ 公里，$g \approx 9.8$ 米/秒 ^{2}，代入上式得到

$$v \approx 7.9 \text{ 公里/秒}$$

这就是第一宇宙速度的数值。

要使物体能逃离地球，不再返回，它的速度应更高，即至少要具有第二宇宙速度那样高的值才行。所谓第二宇宙速度，由下式给出，

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{地}}{R}} \approx 11 \text{ 公里/秒}$$

有关这个公式的证明，留给读者。

对于一个质量为 M, 半径为 r 的体系, 同样可以规定它的“第一宇宙速度”为

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{4.5.2}$$

以及“第二宇宙速度”为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{4.5.3}$$

v_1 和 v_2 的物理意义与前面讨论的相似。当物体的速度达到 v_1 时, 即可绕 M 运动而不会落到 M 上；当物体速度大到 v_2 时，它即可逃离 M，而不再被吸引回来。

下面我们利用 v_1, v_2 来讨论一些有趣的现象。

如果有一个引力体系的第二宇宙速度等于光速，有

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad \text{或} \quad r = \frac{2GM}{c^2}$$

这样，一个体系若满足下列不等式

$$r < \frac{2GM}{c^2}$$

它的第二宇宙速度 v_2 就要大于光速。这就是说，在这种物体上发射的光也都不能克服引力的作用，最终一定要落回到该体系上来。简言之，这种物体根本不可能有光发射出去，因此，我们不能看到它，故称为黑洞。因此，

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{4.5.4}$$

也是一个关键性的物理量, 称为引力半径。对于地球, 质量 $M_{地} = 6 \times 10^{27}$ 克，代入式(4.5.4)，可求得地球的引力半径是 $r_g \approx 0.9$ 厘米。

上述计算表明，如果地球的全部质量能缩小到半径约 1 厘米的小球内，那么，生活在这样小球上的人，将无法和外界进行光

的或无线电的联系，它将成为一个孤立的体系。这当然只是一个设想。下面我们来看一个较实际的例子。

我们考虑一个球体，其半径为 r，其中物质均匀分布，密度为 ρ，则体系的质量为

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \tag{4.5.5}$$

如果这个体系的半径恰好达到自己的引力半径，则由式(4.5.4)、(4.5.5)得到

$$r_g = \frac{8\pi G r_g^3 \rho}{3c^2}$$

亦即引力半径为

$$r_g = \left(\frac{3c^2}{8\pi G \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.5.6}$$

式(4.5.6)是说，对于生活在密度为 ρ 的环境中的人，他不可能把光发射到超出 r_g 的范围。我们生活的宇宙环境的密度平均约为 $\rho \approx 10^{-29}$ 克/厘米，因此，由式(4.5.6)立即求得引力半径为

$$r_g \approx 10^{28} \text{ 厘米}$$

这就是说，我们不可能把光发射到 10^{28} 厘米之外，我们称这个尺度为宇宙大小，或宇宙半径。

4.6　力的几何性

在4.2节中，当我们分析行星的运动时，只考虑太阳对行星的引力；在分析月亮的运动时，只考虑地球对它的引力。实际上，这样的分析是不严格的，因为月亮不仅受地球的引力作用，而且也要受太阳的引力作用。计算一下就会发现，太阳对月亮的引力与地球对月亮的引力相比，大小是差不多的，并不能作为小量加以忽略。

为什么只考虑地球对月亮的作用，就能得到非常正确的结果呢？原因在于太阳对月亮的作用效果与太阳对地球的作用效果是完全一样的。这就是说，倘若地球和月亮之间没有作用，那么，在太阳引力作用下，地球和月亮的轨道完全一样；在地球上来看，月亮和地球的相对位置始终保持不变，好象根本不存在太阳的作用一样。因此，当我们研究地球和月亮的相互关系时，可以不考虑太阳的作用，而只考虑地球和月亮之间的相互作用。

“作用效果完全一样”，用数学语言来说，就是在下列方程中，$v_{月}$ 和 $v_{地}$ 相等。

$$m_{月}\frac{v_{月}^2}{r}=\frac{Gm_{月}M_{日}}{r^2} \tag{4.6.1}$$

$$m_{地}\frac{v_{地}^2}{r}=\frac{Gm_{地}M_{日}}{r^2} \tag{4.6.2}$$

其中 $m_{月}, m_{地}, v_{月}, v_{地}$ 分别是月球和地球的质量与速度；$M_{日}$ 是太阳的质量；r 是地球到太阳的距离。应当注意，方程(4.6.1)和方程(4.6.2)两边质量的物理含义并不相同。方程左边的质量是牛顿第二定律 $F=ma$ 中的质量，它的意义是力与加速度之比，是物体惯性大小的度量，质量越大的物体，速度越难改变，所以称为惯性质量。而方程右边的质量是牛顿引力定律 $F=ma/r^2$ 中的质量，它是质点感受外物引力大小的度量，质量越大，感受到外物的引力越大，称为引力质量。为清楚起见，我们把式(4.6.1)、(4.6.2)改写为

$$\left(m_{月}\right)_{惯}\frac{v_{月}^2}{r}=\frac{G\left(m_{月}\right)_{引}M_{日}}{r^2} \tag{4.6.3}$$

$$\left(m_{地}\right)_{惯}\frac{v_{地}^2}{r}=\frac{G\left(m_{地}\right)_{引}M_{日}}{r^2} \tag{4.6.4}$$

其中下标“惯”表示惯性质量，“引”表示引力质量由式(4.6.3) 、

(4.6.4)可知，要求 $v_{月} = v_{地}$，等价于

$$\frac{(m_{月})_{惯}}{(m_{月})_{引}} = \frac{(m_{地})_{惯}}{(m_{地})_{引}} \tag{4.6.5}$$

式(4.6.5)就是我们在处理地月相互关系时可以忽略太阳作用的根据。我们可以把上述的论证推广，得到对任何物体 A 都有

$$\frac{(m_A)_{惯}}{(m_A)_{引}} = \frac{(m_{地})_{惯}}{(m_{地})_{引}} \tag{4.6.6}$$

因此, 任一物体的惯性质量与引力质量之比都应等于一普适常数, 即

$$\frac{m_{惯}}{m_{引}} = 普适常数 \tag{4.6.7}$$

显然，只要单位选择适当，总可以使这个普适常数为 1。

对于上述论断, 在历史上曾多次用实验来检验。最著名的实验是 Eötvös 在 1890 年做的, 他的仪器如图4.5所示。先调整扭秤处于“自然”状态 (即扭丝没有扭转), 安放于图4.5(b)所示的位置, 然后把两个引力质量相等但材料不同的物体 A, B 分别放置在扭秤的两臂上 (图4.5(a)) 。因为 $(m_A)_{引} = (m_B)_{引}$, 所以 A, B 受到太阳的引力作用相等。如果 A, B 的惯性质量不等，设 $(m_A)_{惯} > (m_B)_{惯}$, 则当 A, B 随地球绕太阳公转时，所受向心力不等，故悬丝将产生一扭转，杆将处于如图4.5(c)所示的状态 (图中 C 点为地球上的观察者)。12 小时后, 由于地球自转, 地球上的观察者 C 将由靠近太阳的一侧，转到远离太阳的一侧。同上分析，杆转到如图4.5(d)所示的状态。因此，对地球上的观察者 C 来说，他看到扭秤将有以 24 小时为周期的摆动。

Eötvös 用一些不同材料的物体悬在扭秤上做过多次实验，在实验误差范围内观察不到杆发生摆动。从而得出结论：在精确度为 10^{-8} 的范围内, 各种物体的惯性质量与其引力质量的比是一常

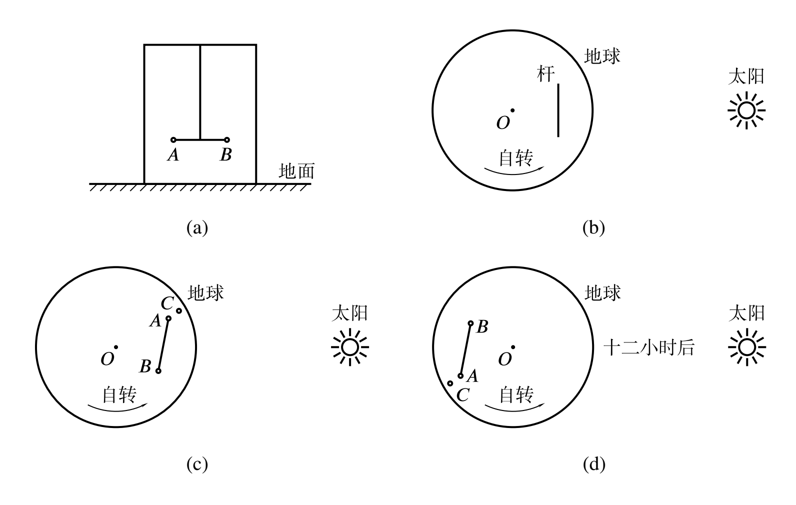


图 4.5 Eötvös 实验示意图

数。1964 年，Dicke 把实验精度提高到 10^{-10}，1971 年，又提高到 10^{-11}。Eötvös 实验是到目前为止精度最高的著名物理实验之一。

其实，在 Eötvös 之前，就有人做过这类实验。伽利略的比萨斜塔实验以及斜面实验，证明了不同物体的自由落体运动是一样的，与物体的质料无关。牛顿也设计过验证惯性质量与引力质量的比为普适常数的实验。我们很容易推导出单摆周期 T 为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{惯} l}{m_{引} g}}$$

其中 $m_{惯}$ 及 $m_{引}$ 分别是摆锤的惯性质量及引力质量；l 是摆长。牛顿用不同材料作摆锤，做过多次实验。如果惯性质量和引力质量的比不是普适常数，将会反映在摆周期的变化上。但是牛顿发现，在所有这些情况下，摆的周期都相同。当然，这实验的精度远不如 Eötvös 的实验精度。

存在普适常数式(4.6.7)是引力所具有的一个基本性质，即引力的几何性。下面我们来讨论引力几何性的含意。

我们知道，开普勒第三定律说，任何行星的运动周期的平方与其椭圆轨道半长轴的三次方成正比。这是描写行星运动规律的定律，它只涉及度量行星运动的时间量和度量轨道的空间量，即仅仅涉及几何量，而并没有涉及到行星本身的任何物性。运动学只涉及几何量，动力学则应当涉及物性。因为动力学是研究物体之间的相互作用力如何使物体产生运动，而相互作用力一般是和物性有关的。但开普勒第三定律中却不含物性，这就是引力几何性的一个反映。

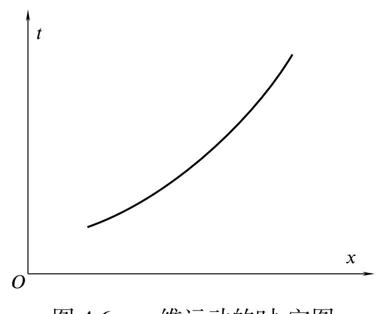


图 4.6　一维运动的时-空图

对于质点运动，我们可以用时-空图来表示，图4.6是一维运动的时空图。如果已知质点轨道方程为

$$x = x(t)$$

我们可在时一空图上绘出相应的曲线。从曲线上,可求得在任何时刻质点的位置、速度等。因此，它能完全表达质点的运动。

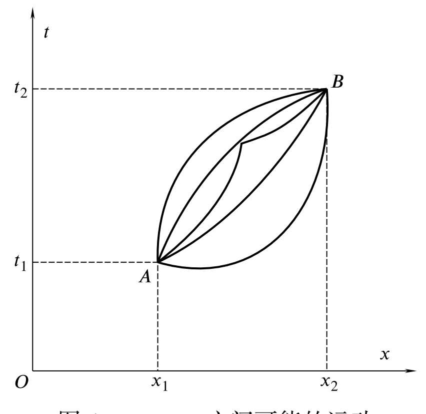


图 4.7　*A*，*B* 之间可能的运动

从运动学来说，如果只告诉我们质点在 t_1 时位于 x_1，在 t_2 时运动到 x_2，那么这中间可以有无穷多种可能的选择，即可写出无穷多种满足上述要求的运动方程。反映在时-空图上 (图4.7) 就是，每一种选择对应一条过 *A*，*B* 点的曲线，即可作无穷多种时

空曲线连接 A，B 两点。

现在我们来讨论质点在地面附近重力场中沿竖直线运动的一维情形。如果质点受重力作用，而且仅受重力作用，且 t_1 时刻在 x_1, t_2 时刻运动到 x_2，那么它的轨道方程是

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

而且其中的常数 x_0 和 v_0 将由 $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$ 唯一地确定。这就是说，在时-空图上只能有一条连接 A, B 的时空曲线，而绝不允许有其他的任何选择，对任何质料的物体均如此 (即在连接 A, B 的时空曲线的方程中，没有标志物性的因子或系数；对各种质料而言，曲线是唯一的) 这就是重力的几何性

对于引力控制的运动，也与重力有相同的性质。对任何质料的物体，若给定初始和终了的时空点，则引力决定了物体在时-空图上的唯一可实现的曲线，即决定了运动物体的时间和空间的几何性质。引力的这种几何性是引力的最大特点，其他力 (例如电磁力等) 没有这种性质。

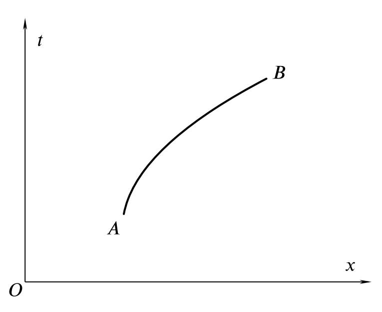


图 4.8 A，B 之间唯一可实现的时空曲线

从动力学方程很容易看到这个特点，在万有引力情况，有

$$ma = \frac{GmM}{r^2}$$

可得

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

因为引力质量和惯性质量相同，故二者从方程中消去了。这样，

在上述方程中就不含有运动物体本身的物性，而只是一种几何的关系式。但在其他力的情况，没有这个性质。

4.7 多质点体系的引力作用

我们知道，牛顿的万有引力定律式(4.3.4)

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{4.7.1}$$

是对两个质点而言的。牛顿在发展引力理论过程中，重要的一步是把月亮运动和落体运动统一起来。在这个分析中，一个关键的问题是牛顿认为地球表面落体运动的加速度可以写为

$$g=\frac{GM_{地}}{R^2} \tag{4.7.2}$$

其中 R 是地球半径。其实式(4.7.2)是直接从式(4.7.1)得来的。这里有一个很大的疑问，为什么能把地球和落体间的距离看为 R？如果说在讨论月亮运动时，把地球和月亮看作质点是一个足够好的近似，那么讨论落体运动时，把地球看作质点显然是不合理的牛顿一开始就意识到这一点，他感到不加证明地取地球和落体间距离为 R，从理论上来说是有欠缺的。后来，他给出了严格的证明。为了研究这个问题，我们必须来讨论一下多质点体系的引力问题。

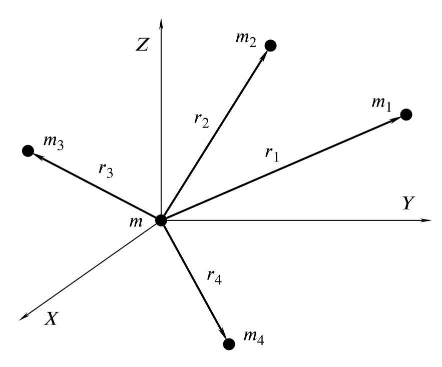


图 4.9　多质点体系的引力

现在我们先来讨论一种简单情况。如图4.9所示，在原点有一质量

为 m 的质点，空间分布着质量分别为 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_i$ 的若干个质点，它们的位置矢径分别为 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_i$。为了求质点 m 所受到的引力，必须把式(4.7.1)作些推广。根据式(4.7.1)可知：

第一个质点对 m 的引力为　$\mathbf{F}_1 = \dfrac{Gmm_1}{r_1^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1}$

第二个质点对 m 的引力为　$\mathbf{F}_2 = \dfrac{Gmm_2}{r_2^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_2}{r_2}$　　(4.7.3)

…………

第 i 个质点对 m 的引力为　$\mathbf{F}_i = \dfrac{Gmm_i}{r_i^2} \cdot \dfrac{\mathbf{r}_i}{r_i}$

式中 $\dfrac{\mathbf{r}_i}{r_i}$ 表示第 i 个质点对 m 的引力的方向。因此，可以自然地认为，m 所受到的总力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_i \\ &= \sum_i \frac{Gmm_i}{r_i^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}\end{aligned} \tag{4.7.4}$$

应当指出，这个推广中暗含了一个新观点。式(4.7.4)并不全同于(4.7.1)所包含的物理内容，因为式(4.7.1)只说了两个质点间的引力作用，而式(4.7.4)的写法，在本质上是认为两质点之间的引力作用只与这两质点有关，而与第三者、第四者等等是否存在毫无关系，可以不加顾及。这个新的物理内容是引力的一个重要性质，我们称之为引力的线性迭加性。并不是所有的力都有这种性质，譬如，强相互作用就没有这种性质。

做了上述推广，就可以来讨论牛顿所遇到的问题了。

考虑一密度均匀的球壳 (图4.10)，它的厚度 t 比它的半径 r 小得多。我们要求出它对球壳外一个质量为 m 的质点 P 的引力。

可以把球壳看成许多小块的集合，每个小块在 P 点上都有作用力，这力的大小应当与该小块的质量成正比，而与它和 P 点之

间的距离的平方成反比，方向沿着它们之间的连线。然后，我们再求球壳上所有部分对 P 点的合力。

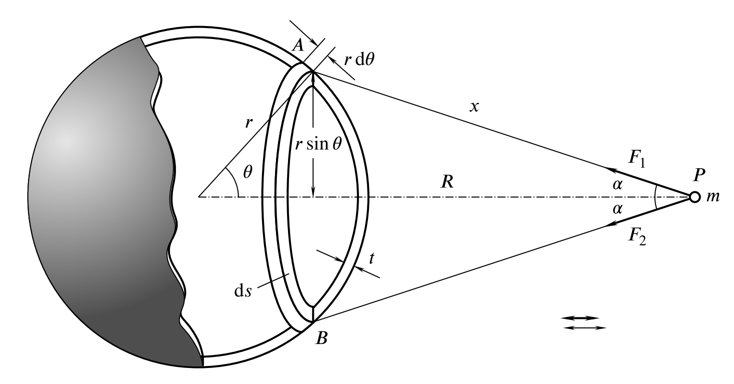


图 4.10　球壳的引力

设在球壳 A 点处的一小块对 m 的引力为 $\mathbf{F}_1$，由球壳的对称性，我们可以找到与 A 相对称的 B 点，该处的一小块对 m 的引力为 $\mathbf{F}_2$。由于对称，故 $\mathbf{F}_1$ 与 $\mathbf{F}_2$ 这两个力的竖直分量彼此抵消，而水平分量 $F_1\cos\alpha$ 与 $F_2\cos\alpha$ 相等。通过把球壳分为这样一对一对的小块，我们立刻可以看出，所有作用在 m 上的力的竖直分量都成对地相互抵消了。为了求出球壳对 m 的合引力，我们只需考虑水平分量。

如图4.10，考虑球壳上的一环带，该环带长为 $2\pi(r\sin\theta)$，宽为 $r\,\mathrm{d}\theta$，厚为 t。因此，它的体积为

$$\mathrm{d}V = 2\pi t r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

设密度为 ρ，则环带的质量为

$$\mathrm{d}M = \rho\,\mathrm{d}V = 2\pi t\rho r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$\mathrm{d}M$ 对位于 P 点处的质量 m 所施的力是水平的，其值为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= G\frac{m\,\mathrm{d}M}{x^2}\cos\alpha \\ &= 2\pi G t\rho m r^2\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{x^2}\cos\alpha\end{aligned} \tag{4.7.5}$$

其中 x, α 和 θ 之间满足下列关系

$$\cos\alpha = \frac{(R - r\cos\theta)}{x} \tag{4.7.6}$$

再根据余弦定理

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta \tag{4.7.7}$$

即

$$r\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R} \tag{4.7.8}$$

对式(4.7.6)进行微分，得

$$2x\,\mathrm{d}x = 2Rr\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

即

$$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{x}{Rr}\,\mathrm{d}x \tag{4.7.9}$$

将式(4.7.8)代入式(4.7.6)，再将式(4.7.6)、(4.7.9)代入式 (4.7.5)，从而消去 θ 与 α，得

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\pi G t\rho m r}{R^2}\right)\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)\mathrm{d}x \tag{4.7.10}$$

这就是环带 $\mathrm{d}S$ 的物质作用在质点 m 上的引力。

整个球壳的作用即为上式对所有环带求和，亦即对变量 x 求遍及整个球壳的积分。因为 x 的范围是从最小值 $R - r$ 到最大值 $R + r$，所以

$$\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)\mathrm{d}x = 4r \tag{4.7.11}$$

故合力为

$$\begin{aligned} F &= \int_{R-r}^{R+r}\mathrm{d}F \\ &= G\frac{\left(4\pi r^2\rho t\right)m}{R^2} \\ &= G\frac{Mm}{R^2} \end{aligned} \tag{4.7.12}$$

式中 $M = 4\pi r^2 t\rho$ 为球壳的总质量。这个结果表明，一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。

一个实心球体可当作由大量同心球壳所构成。如果各层球壳具有不同密度，但每一球壳都具有均匀密度，则同样的论证也适用于这种实心球体。因此，对于象地球、月球或太阳这类近似于球体的天体来说，在讨论它们的吸引力时，就可以把它们当作质量集中在球心的质点来处理。

应当强调，之所以有上述结果，是我们用了引力的迭加性和引力的距离平方反比律。因此上述结果对其他类型的力就不一定成立。

其实，地球并不是标准的球体，而是有点象梨的形状，“梨”的较小一端在北半球。因此，式(4.7.12)是不严格的。若考虑地球的真实形状，引力表达式将非常复杂。譬如，在地球附近运行的人造地球卫星，明显地偏离了开普勒定律所描述的轨道。实际上，现代的研究正是利用了这一点。我们是反过来，由人造地球卫星实际轨道对开普勒定律的偏离，来研究地球的形状和质量的分布。

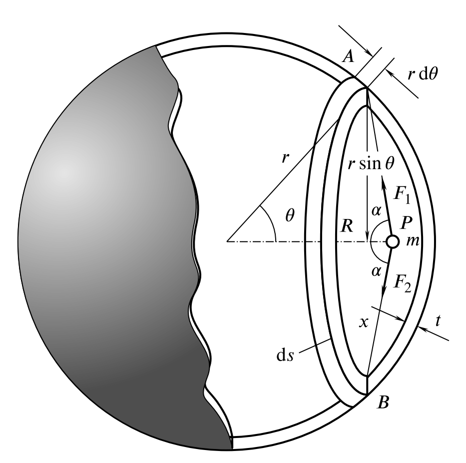


图 4.11　对球壳内部的引力

另一个有意义的结果是，球壳对内部任一质点的引力为零。以下我们参照图4.11来证明这个论断。

现在，m 位于球壳内部，即 R 小于 r，因而式(4.7.10)以及式(4.7.11)仍然适用，但其积分限应换成从 $r-R$ 到 $r+R$，即

$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x=0$$

所以

$$F=0$$

这个结果有很大的意义，我们将在下章讨论。

思 考 题

1. 假设整个太阳系空间均匀地充满一种密度为 ρ 的物质，它对行星运动的阻力可忽略不计。试导出在此情形下行星按圆轨道公转的周期与轨道半径之间的关系。推导时可认为太阳是质量为 $M_{日}$ 的质点。

2. 如果太阳对周围行星的吸引力不是与 r^{-2} 成比例，而是与 r^{-n} 成比例。试问：对于作圆轨道运动的行星来说，开普勒第三定律要作怎样的修改？

3. 在计算任意形状的物体 A 与其外某一质点 P 之间的万有引力时，是否可以把 A 当作质量集中于其质心的质点来处理？

4. 任意形状的外壳对内部某一质点的引力都为零吗？

5. 中国传统的历法——阴历，是以月亮绕地球的周期为月，而且还有 24 个节气表示太阳在黄道上的位置，两个相邻节气之间相隔 360°/24 = 15° 。由于 12 个月不是太阳在黄道上运行一周的时间，因此在 19 年中有 7 个闰月，按规定，闰月中只能有一个节气。试问：为什么闰月总是在夏季 (即阴历 5 8 月)？

6. 为什么中国发射的通信卫星要求定点于东经 70° 和东经 125° 的赤道上空？

7. 在地球的引力场内，任何物体都受到地球引力的作用，作向心的运动。但氢气球、水中的气泡等却有向上运动的趋势，它们是否不受地球的引力？

8. 考虑到地球是球形，重力加速度的方向是指向地心的，抛体的轨迹不应当是抛物线。那么，应当是什么曲线？

9. 考虑空气的摩擦力之后，抛体的运动方程中含有哪些与运动物体本身物性有关的物理量？

10. 引力的"超距作用"观点意味着引力作用的传播速度是无穷大，因而作用是瞬时发生的。近代物理理论认为，引力作用以有限速率传播，所以经典理论应当作相应的修改。如果你有兴趣，可以参考 Jonothan L. Logan, *Gravitational Wave - Progress Report* , Physics Today, 1973.3；以及 I. J. Good, *Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics*, American Journal of Physics, 1975.7。

习　题

1. 在卡文迪许实验中 (参考图4.4)，设 $\boldsymbol{M}$ 与 m 的中心都在同一圆周上，两个大球分别处于同一直径之两端，各与近处小球之球心距为 $r = 10.0$ 厘米，轻杆长 $l = 50.0$ 厘米，$\boldsymbol{M} = 10.0$ 千克，$\boldsymbol{m} = 10.0$ 克，悬杆的角偏转 $\theta = 3.96 \times 10^{-8}$ 弧度，悬丝的扭转常数 $k = 8.34 \times 10^{-8}$ 千克 · 米 ^{2}/秒 ^{2}。试求 $\boldsymbol{G}$ 之值。

2. 试计算太阳对月球的引力 $\boldsymbol{F}_{日\to月}$ 以及地球对月亮的引力 $\boldsymbol{F}_{月\to日}$，并比较二者的大小。

3. 已知地球中心与月球中心相距 $s = 3.84 \times 10^5$ 公里，地球质量 $\boldsymbol{M}_{地}$ 与月球质量 $\boldsymbol{M}_{月}$ 之比为 81 : 1。有一星际飞船从地球飞向月球，船中乘客在通过地球引力区和月球引力区的分界线时，没有测到重力，试求此处距地球多远？

4. 有一根无限长的直线，线密度为 ρ。试问：与它相距为 x 处的一个质量为 $\boldsymbol{M}$ 的质点所受的引力等于多少？方向指向哪里？

5. 有一根质量为 M、长为 $2L$ 的直线。将坐标系原点取在直线的中点，直线为 y 轴，过中点的垂线取为 x 轴。

(1) 有一质量为 m_1 的质点在 $P_1(x,0)$ 位置，求这直线作用于 m_1 上的引力表达式及引力的方向；

(2) 有一质量为 m_2 的质点在 $P_2(0,y)$ 位置，求这直线作用于 m_2 上的引力表达式及引力的方向；

(3) 如果 $L=1$ 米，线密度 $\rho=2$ 克/厘米，$m_2=0.5$ 克，$y=3$ 米，试问：$2L$ 作用于 m_2 上的引力之值是多少？

6. 如果太阳的质量突然减少一半，试问地球轨道 (假定是圆) 会发生什么变化？

7. 设某一星系中的体为均匀球状分布，该星系的总质量为 M，半径为 R_0。距星系心为 $r<R_0$ 处有一质量为 M_1 的星体，M_1 在引力作用下作圆周运动。问：

(1)M_1 所受的引力是多少？

(2)M_1 作同周运动的率是多少？

8. 已知月球的质量约为地球质量的 1/81，其直径约为地球直径的 3/11，若不计由于地、月自转引起的重量变化。试问：在地球上重 60 公斤的人，在月球上用弹簧秤称得的体重是多少？

9. 已知火星的平均直径为 6900 公里，地球的平均直径为 1.3×10^4 公里，火星质量约为地球质量 M_E 的 0.11 倍。试求：

(1) 火星的平均密度 ρ 与地球的平均密度 ρ_E 之比；

(2) 火星表面的 g 值。

10. 试由月球绕地球运行的周期 ($T = 27.3$ 天) 和轨道半径 ($r=3.85\times10^5$ 公里)(设为圆轨道)，来确定地球的质量 M_e。

11. 地球绕太阳公转周期 $T\approx365$ 日，地日距离 $r\approx1.49\times10^8$ 公里，设地球轨道为圆形，求太阳质量 $M_{日}$。

12. 已知太阳离银心距离约为 2.4×10^{20} 米，太阳绕银心转一周约需 2.5×10^8 年。设大阳运行轨道为圆形，银河系中恒星的平

均质量与太阳相等。试估计银河系中太阳轨道以内的恒星个数。

13. 在一个质量为 M，半径为 R 的铅球中挖一个半径为 $R/2$ 的空腔，使它的表面与铅球球面相切。在铅球中心与空腔中心的连线上，且离铅球中心距离为 d 处放一个质量为 m 的小球 (图4.12)。试求在这种情况下铅球与小球之间的引力 $\mathbf{F}$。

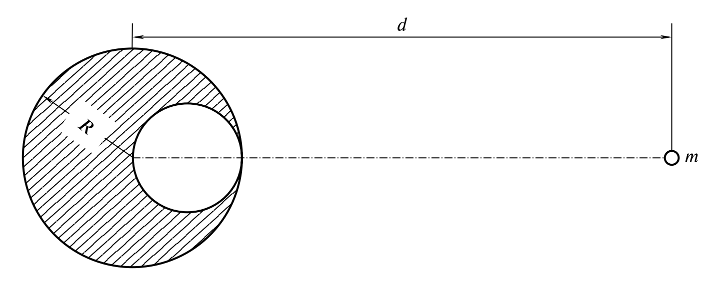


图 4.12

14. 有一密度均匀的球壳，外半径为 a，内半径为 b，总质量为 M。在离球心 r 处有一质量为 m 的质点，r 的范围为 $0 \leqslant r \leqslant \infty$。试简略地画出球壳对 m 的引力 F 与 r 之间的函数曲线。

15. 一人造地球卫星以圆形轨道环绕地球飞行，其周期为 $T = 90.0$ 分钟。已知地球半径为 $R = 6.37 \times 10^3$ 公里，质量为 $M_E = 5.98 \times 10^{27}$ 克，万有引力常数为 $G = 6.67 \times 10^{-}8$ 厘米^3/克 $\cdot^2$。求卫星离地面的高度 h。

16. 同步卫星广泛用于地球范围内的电视转播和通讯。它在地球上空以地球自转的角速度绕地心转动，这就使它能停留在地面某一确定点的上空。求：

(1) 同步卫星的轨道相对地球的方位；

(2) 同步卫星轨道的半径有多大？

17. 关于中子星问题：

(1) 有一密度均匀的球体，以角频率 ω 围绕自身的几何对称轴旋转。若维持其表面物质不因快速旋转被甩掉的力只有引力，这

球体的密度 ρ 至少要多大?

(2) 蟹状星云(经过认证,它是我国北宋至和元年,即公元 1054 年观测到的一次超新星爆发的遗迹) 中有一颗脉冲星,它每秒转 30 周。以此数据估算这颗脉冲星的最小密度。

(3) 若此脉冲星的质量约为一个太阳的质量 $M_{日}$(约 2×10^{30} 公斤或约 $3\times10^{5}M_E$),试问:它的最小的可能半径是多少?

18. 在地面上重 16 公斤的物体,在以 $a=g/2$ (g 为地面处的重力加速度) 上升的人造地球卫星里,视重为 9.0 公斤。这时该卫星离地面多远?

19. 一密度均匀的球形天体,半径为 R,它的质量 M 至少为多大时,才会使它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度?

20. 一密度均匀的球形天体,它的质量等于太阳质量 $M_{日}=1.98\times10^{30}$ 公斤,问它的半径 R 最大为多少时,才会使它的第一宇宙速度大于光在真空中的速度?

21. 一行星沿椭圆轨道绕太阳运行,离太阳最近时 (距离为 r) 速度最大,记为 V;离太阳最远时 (距离为 R) 速度最小,记为 v。

(1) 证明 $\dfrac{V}{v}=\dfrac{R}{r}$。

(2) 地球绕太阳公转,在远日点的速度为 29.2 公里/秒。已知地球轨道的偏心率为 0.01674,求地球在近日点公转的速度。

22. 设某行星绕中心天体在圆轨道上运行,公转周期为 T。用开普勒第三定律证明:一个物体从此轨道由静止自由落至中心天体所需的时间为 $d=\dfrac{T}{4\sqrt{2}}$。

23.(1) 一物体在月球轨道上,设只受地球引力,由静止开始自由落向地球。不计地球大气的阻力,求落到地面所需的时间 t 和落地时的速度 v。

(2) 一物体在地球轨道上，设只受太阳引力，由静止开始自由落向太阳，不计阻力，求落到太阳表面所需的时间和到达太阳表面时的速度。

24. 哈雷彗星绕日运动的周期为 76 年，估计它的远日点到太阳的距离。

第五章

牛顿宇宙学

5.1 哥白尼原理

牛顿在处理行星运动的时候，只考虑了太阳对行星的引力作用，但却完全忽略了其他恒星等天体对行星的作用。这是一个非常大胆的假设，但他却获得了正确的结果。在牛顿之后，研究太阳系中或地球附近的力学问题时，实质上也都暗含地采用了上述假设，完全忽略了其他天体的作用。

因此，我们要问：为什么可以忽略其他星体的作用呢？为什么完全忽略其他星体的作用之后，还能得到许多正确的结果呢？

理由之一是引力质量与惯性质量之比是普适常数。由此即可忽略其他恒星对太阳-行星体系的作用，就象在研究地球-月亮体系的运动时，在相当精度范围内，可以先不计太阳的作用。然而，这个理由并不能使我们完全忽略恒星的作用。特别是体系越大越不能完全忽略。太阳-行星体系比地球-月亮体系大得多，所以这个理由是不充分的。

理由之二是恒星距离太远，所以它对行星的引力很小，可以忽略。的确，最近的恒星距我们约为 4.3 光年 (一光年等于光在一年中运行的距离，约等于 9.4605×10^{15} 米)，其他天体就更加遥远，每颗恒星对行星的作用是非常小的。但是，如果宇宙是无限的，恒星的数目也无限，则无限恒星总和的力却可能极大极大。因此，只当宇宙有限，星体数目有限时，这个理由才成立。

这种情况迫使我们采用第三个理由，即认为星体的分布相对于我们是对称的。如果在每个与我们距离相等的球壳状天区内星体分布是均匀的，则由上章最后的讨论，这种球壳对太阳-行星体系的作用严格为零。

这种模型的确很理想，但它有一个严重的观念上的困难。因为在这种模型里，似乎太阳或地球又成为宇宙的中心，这是我们难于接受的。从哥白尼以来，一个最重要的科学成果是认识到地球不是宇宙的中心，太阳也不是宇宙的中心。

上述种种分析告诉我们，虽然物理学往往着眼于研究局部的现象，但是并不能完全地回避整个宇宙的问题。因为整体宇宙性质会影响到局部的现象。我们要想建立一个自治的局部现象的理论，也必须对宇宙整体性质给以说明。

本章的目的就是要建立一个恰当的宇宙模型，使它能够说明本节一开始提出的问题，同时又不与宇宙不存在中心这一观念相矛盾。因此，我们的讨论首先就必须坚持以下的出发点：

> 在宇宙中没有特殊的位置，每一个观察者看到的现象都是一样的。

这个陈述常被称为哥白尼原理。所谓“没有特殊位置”，意即没有中心，所谓“每个观察者看到的都一样”，意即宇宙间各点是平权的。应该说明，每个观察者看到的现象，并非指所有的现象，而是大尺度上的平均现象。从小尺度来看宇宙各处都有许多差异，但从大尺度的平均来看，的确是差异较小的。

5.2 宇宙中的密度分布

现在我们用哥白尼原理来分析宇宙中的密度分布。

如图5.1，考虑两个典型的观察者 O 及 O'，两者相对位置由矢量 $\mathbf{c}$ 描写。设 O 观察者所看到的位于 $\mathbf{r}$ 处在 t 时刻的星

体质量密度为 $\rho(\mathbf{r},t)$。它的意义是在 t 时刻位于 $\mathbf{r}$ 的小体积元 $\mathrm{d}V$ 中的质量为

$$\mathrm{d}M=\rho(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V$$

类似地，O' 观察到的密度分布写为 $\rho'\left(\mathbf{r}',t\right)$，$\mathbf{r}'$ 是相对于 O' 的位置矢量。

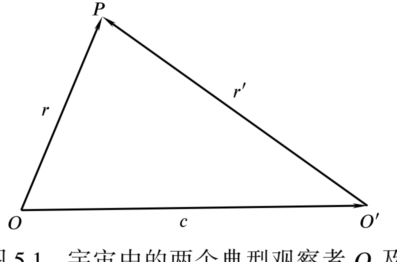


图 5.1 宇宙中的两个典型观察者 O 及 O'

由哥白尼原理，O 及 O' 看到的密度分布应相同，即相对于 O' 位置矢量为 $\mathbf{r}'$ 处的密度应等于相对于 O 位置矢量为 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ 处的密度，即

$$\rho'\left(\mathbf{r}',t\right)=\rho\left(\mathbf{r}',t\right) \tag{5.2.1}$$

另外，若分别由 O 及 O' 观察同一点 P，其密度值当然应是一样的，因为一个点只能有一个密度，故

$$\rho'\left(\mathbf{r}',t\right)=\rho(\mathbf{r},t) \tag{5.2.2}$$

其中 $\mathbf{r}'$ 及 $\mathbf{r}$ 之间满足下式

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{c} \tag{5.2.3}$$

由式(5.2.1)、(5.2.2)、(5.2.3)可得

$$\rho(\mathbf{r}-\mathbf{c},t)=\rho(\mathbf{r},t) \tag{5.2.4}$$

由于 O 与 O' 是可任意选的，即 $\mathbf{c}$ 取任何值上式都应成立。这样，结论是

$$\rho(0,t)=\rho(\mathbf{r},t) \tag{5.2.5}$$

这表示，物质的密度应与 $\mathbf{r}$ 无关，天体在大尺度上的分布应是均匀的。这种密度分布一方面不与哥白尼原理矛盾，各个观察者都将看到同样的均匀分布的天体；另一方面，它也能解释为什么可以忽略无限多的星体在局部范围的引力效应，因为均匀分布是一种对称分布。

现代天文观测的确已逐步证明，宇宙在大尺度的物质分布是相当均匀的。

5.3 几种速度分布解

我们再来讨论速度分布，仍利用图5.1。设 O 观察者所得到的速度为 $\mathbf{q}(\mathbf{r},t)$，其意义是在 t 时刻相对于 O 位于 $\mathbf{r}$ 处的天体的平均速度。类似地，O' 所观测到的速度取为 $\mathbf{q}'\left(\mathbf{r}',t\right)$。

由哥白尼原理，O' 观测到的位于 $\mathbf{r}'$ 的天体速度应等于 O 观测到的位于 $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ 的速度，即

$$\mathbf{q}'\left(\mathbf{r}',t\right)=\mathbf{q}\left(\mathbf{r}',t\right) \tag{5.3.1}$$

如果再让 O 及 O' 观测同一点 P，则按照牛顿运动学中的速度合成律，应有

$$\mathbf{q}'\left(\mathbf{r}',t\right)=\mathbf{q}(\mathbf{r},t)-\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} \tag{5.3.2}$$

其中 $\mathbf{r}'$ 及 $\mathbf{r}$ 同样满足式(5.2.3)，$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t}$ 是 O' 相对于 O 的速度。故有

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{q}(\mathbf{c},t) \tag{5.3.3}$$

从式(5.3.1) 、(5.3.2) 、(5.3.3)、(5.2.3)可得

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{c},t)=\mathbf{q}(\mathbf{r},t)-\mathbf{q}(\mathbf{c},t) \tag{5.3.4}$$

这表明 $\mathbf{q}(\mathbf{r},t)$ 是 $\mathbf{r}$ 的线性函数，它只有以下形式的解：

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t)=f(t)\,\mathbf{r} \tag{5.3.5}$$

这样，宇宙的物质速度分布只可能有三种形式：

1. **膨胀解**

$f(t)>0$，天体做均匀膨胀的运动，膨胀速度正比于相对于观察者的距离。

2. **收缩解**

$f(t)<0$，天体做均匀收缩的运动，收缩速度正比于相对于观察者的距离。

3. **静止解**

$f(t)=0$，天体之间都相对静止。

5.4　奥伯斯佯谬和宇宙的膨胀

上节求得的速度分布解，哪一种符合实际情况？我们可以用所谓奥伯斯 (Olbers) 佯谬来判定。

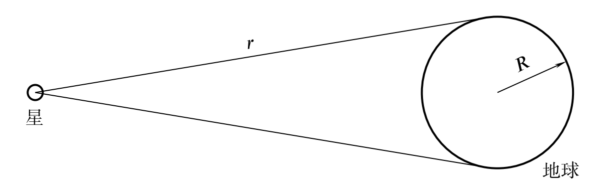


图 5.2　星体射向地球的光子

奥伯斯佯谬讨论星体发射的光子到达地球的数目。如图5.2，假定一颗星离地球的距离为 r，这颗星每单位时间向四面八方均匀地发射 E 个光子。那么，单位时间里落到地球上的光子数应当等于

$$E\frac{\pi R^2}{4\pi r^2}=\frac{ER^2}{4r^2} \tag{5.4.1}$$

其中 R 是地球的半径。

如图5.3，考虑一个以地球为中心，r 为半径的球壳，它的厚度为 $\mathrm{d}r$，这个球壳的体积为

$$4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

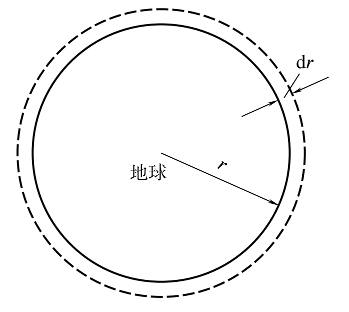


图 5.3　球壳内星体向地球发射的光子

如果每单位体积中平均有 N 个星体，则球壳内的星体数是

$$N4\pi r^2\,\mathrm{d}r \tag{5.4.2}$$

因此，在单位时间里地球从这球壳内里体所得到的光子数为

$$\mathrm{d}L=\frac{ER^2}{4r^2}N4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

这样，整个宇宙中的星体单位时间里射到地球上的光子总数为

$$\begin{aligned} L&=\int \mathrm{d}L=\int_0^\infty ER^2N\pi\,\mathrm{d}r \\ &=\left(ER^2N\right)\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\longrightarrow\infty \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

这表明，从地球上看到的天空是无限亮的，而且无论哪个方向上都是无限亮的。这显然不符合实际情况：夜晚的天空是黑的，白天的天也并不是无限亮。这个矛盾就称为奥伯斯佯谬。

奥伯斯佯谬说明，在推导式(5.4.3)中，我们必定使用了某个错误的假定。检查一下推导式(5.4.3)的过程，我们使用过以下几个假定：

(1) 星体占据的空间是无限的, 星体均匀地分布在无限的空间上；

(2) 星体存在的时间是无限的, 无论在多久之前都有星体充满着无限空间, 而且, 每颗星的平均光度 (即每单位时间发射的光子数) 都是 E；

(3) 整个星体体系没有运动, 即各处的星体相互之间保持着静止。

可见，如果我们采取静止解，则不可能解决奥伯斯佯谬。

如果取宇宙膨胀解或收缩解，则相当于放弃上述的第三条假定。膨胀解和收缩解对奥伯斯佯谬有什么影响呢？严格地说，这个问题已不能在牛顿力学的框架内加以讨论，因为在第二章中已经证明，光是不满足牛顿运动学中的速度合成律式〔(2.3.6)〕的。

在本章中，我们将严格按照牛顿力学进行分析，因此，我们仍认为光也遵从牛顿的速度合成律。这样，对于膨胀解，位于 r

的星体向地球发射的光的速度为

$$c - q = c - |f(t)|r \tag{5.4.4}$$

收缩解为

$$c - q = c + |f(t)|r \tag{5.4.5}$$

如果利用式(5.4.5)，则式(5.4.3)的推导不变，因为所有星光仍都能到达地球。所以，收缩解也不能解决奥伯斯佯谬。

若取式(5.4.4)，则看到，对于

$$r \geqslant \frac{c}{|f(t)|}$$

的天体，其光子速度变为负值，亦即这种光子的速度并不是向着地球，而是背向地球，故这种光子永远不能到达地球。这时，式(5.4.3)中的积分限应改成从 0 到 $c/|f(t)|$，积分可成为有限。所以，膨胀解可以解决奥伯断佯谬。

总之，从哥白尼原理出发，在牛顿力学的框架内，我们证明了宇宙必定在膨胀。

1930 年以来，天文观测直接证实了这个结果：宇宙在膨胀。的确发现，星体相对于我们的膨胀速度正比于它的距离，符合式(5.4.5) 。测得

$$\left|f\left(t_0\right)\right| \equiv H_0 \approx 15\text{千米/(秒}\cdot\text{百万光年)} \tag{5.4.6}$$

即相距我们一百万光年的天体，逃离我们的速度为 15 千米/秒。上式中的 t_0 表示现在的时刻。

5.5　宇宙膨胀的动力学

前面证明宇宙膨胀时，实际上只用到牛顿运动学的知识，现在我们来讨论它的动力学性质。

由于膨胀是均匀的，我们只要研究一些典型天体的运动，就

可以得知膨胀运动的全貌。我们选一个以 O 为心的球壳上的星体，这组星体相对于 O 不断地膨胀，但始终保持球壳的形状。

设在 t 时刻，若在 $\mathbf{r}_0$(单位矢量) 方向的球壳上的星体位于 $\mathbf{r}$，则可以表为

$$\mathbf{r} = R(t)\,\mathbf{r}_0 \tag{5.5.1}$$

其中 $R(t)$ 称为宇宙尺度因子，它描写这个球壳的尺度。

按速度的定义，有

$$\mathbf{q} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{5.5.2}$$

将式(5.5.1)及式(5.5.2) 代入式(5.3.5)，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = f(t)\cdot R(t) \tag{5.5.3}$$

现在研究位于 $\mathbf{r}$ 的质点 (或星体)P 相对于 O 的运动方程。按牛顿引力理论，以 O 为中心，$|\mathbf{r}|$ 为半径的球体内的质量对 P 有吸引力 (图4.10)，引力的强度是

$$G\frac{4\pi}{3}R^3\rho/R^2 = G\frac{4\pi}{3}R\rho$$

其中 ρ 为宇宙间的平均密度，引力的方向沿着 $-\mathbf{r}_0$。另一方面，因为分布是对称的，OP 球之外的天体对 P 的作用为零。这样 P 点的动力学方程为

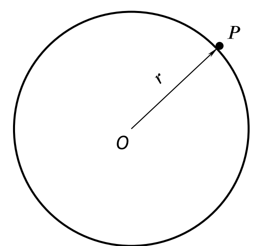


图 5.4　宇宙膨胀的动力学

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi G}{3}R\rho\mathbf{r}_0$$

将式(5.5.1)代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}_0 = -\frac{4\pi G}{3}R\rho\mathbf{r}_0$$

或

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} R\rho \tag{5.5.4}$$

在求解式(5.5.4)时，我们应当注意到，在膨胀或收缩过程中，球壳内的总质量是不变的，因此，有

$$\rho R^3 = 常数$$

或

$$\rho R^3 = \rho_0 {R_0}^3 \tag{5.5.5}$$

其中 ρ_0 及 R_0 分别是 t_0 时刻的平均密度及宇宙尺度因子，将式(5.5.5)代入式(5.5.4)，得到

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0 R_0^3}{R^2} \tag{5.5.6}$$

将上式两边乘以 $\frac{dR}{dt}$，并注意下列关系

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} \cdot \frac{d^2 R}{dt^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} \cdot \frac{dR}{dt} \\ &= \frac{4\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right)\end{aligned}$$

则可得到

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_0 P_0^3 \frac{1}{R}\right] = 0$$

积分后得到

$$\left[\frac{1}{R_0}\left(\frac{dR}{dt}\right)\right]^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{1}{\left(\frac{R}{R_0}\right)} = K \tag{5.5.7}$$

其中 K 表示积分常数，我们分以下两种情况讨论式(5.5.7)。

(1) $K > 0$ 时，由式(5.5.7)得到

$$\frac{dR}{dt} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R} + K R_0^2} \tag{5.5.8}$$

其中正号表示膨胀运动，负号表示收缩运动。由于根号下的量对任何大的 R 值总是正的，所以，这种情况的结论是，一旦宇宙处胀状态，则无论 R 膨胀到多大，总有 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} > 0$，即总处在膨胀状态。这称为无限膨胀解。

(2) $K < 0$ 时，代替式(5.5.8)，则有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{R} - |K| R_0^2} \tag{5.5.9}$$

因此，当宇宙膨胀到

$$R = R_{\max} \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^3 \frac{1}{|K| R_0^2} \tag{5.5.10}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0$$

即膨胀停止。而且，对于 $R > R_{\max}$ 范围，式(5.5.9)的根式成为虚数，故不是物理解。这说明，宇宙不可能膨胀到 $R > R_{\max}$ 范围。因此，在这种情况的结论是，宇宙膨胀到 $R = R_{\max}$，转变为收缩，这称为膨胀-收缩解。

总之，我们的宇宙可能有两种前景，一是将永远膨胀下去，一是将来会停止膨胀，并变成收缩。到底是哪一种前景，将取决于 K 的符号。

由于方程(5.5.7)对任何时刻都成立，我们取 $t = t_0$ 时刻，则有

$$K = \left[\frac{1}{R_0}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)_0\right]^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \tag{5.5.11}$$

其中 $R_0 = R\left(t_0\right)$。另外，由式(5.5.3)，得

$$\frac{1}{R_0}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)_0 = f\left(t_0\right) = H_0$$

所以，式(5.5.11)可变成

$$K = H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \tag{5.5.12}$$

定义下列量

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 4.8 \times 10^{-30}\text{克/厘米}^3$$

它称为临界质量密度。由式(5.5.12)可得

(1) 当 $\rho_0 < \rho_c$ 时，$K > 0$;

(2) 当 $\rho_0 > \rho_c$ 时，$K < 0$。

所以，我们宇宙的前景，完全决定于现今 (即 t_0 时刻) 宇宙中的平均质量密度 ρ_0。目前对 ρ_0 的测量还十分不准确，尚不清楚 ρ_0 是大于或小于临界密度 ρ_c。这是现代宇宙学正在研究的一个问题。

习　　题

1. 对 $K = 0$ 的宇宙，试求 $R(t)$ 的一个明显表达式。
2. 试证明，宇宙的膨胀总是减速的。

第六章

能 量 守 恒

6.1 机械能守恒

在自然界里，有许多机械运动具有重复性。例如，围绕太阳运转的行星，虽然它的位置及速度时刻在变化着，但总的来看，它的运动是周而复始地重复。一个钟摆的位置及速度也在时刻变化着，但总的来看，它的运动也是周而复始地重复。从高后处自由落下一个乒乓球，如果球台的弹性是理想的，则乒乓球会在 h_0 与球台之间弹跳不止，周而复始地上下运动 (图6.1)。这类的实例，还可举出不少。它们的共同特点是，在时刻变化的运动状态中，有某种不变的因素。虽然这些运动能用前面学过的概念加以分析，但我们希望直接找出描写这种不变性质的物理量。

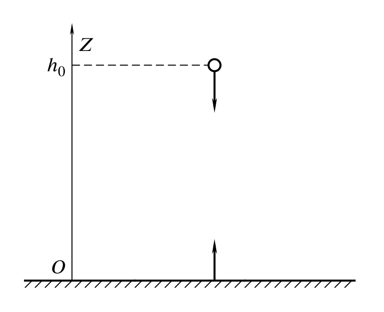


图 6.1　乒乓球的周而复始地上下运动

行星绕太阳运动可以近似为一个匀速圆周运动。它的速度的方向时刻变化，但是速度的大小 v 总是不变的，当然 $\frac{1}{2}mv^2$ 也是

不变的 (其中 m 是行星的质量)。所以，行星运动的不变性质中，至少有一个可以用下述方程来描写：

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{不变量} \tag{6.1.1}$$

上式左边的量称为行星的动能。因此，在行星运动过程中，可以说它的动能保持不变，或者说它的动能是守恒的。

对于图 6.1 的乒乓球的弹跳运动，它的位置与速度大小满足下列关系

$$v = \sqrt{2g\left(h_0 - z\right)} \tag{6.1.2}$$

此式无论在球的下落还是上弹阶段都是正确的。显然，乒乓球的动能不再守恒了，因为在运动过程中速度大小时刻在变化。但是由式(6.1.2)可得

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgh_0 \tag{6.1.3}$$

注意到 h_0, m, g 都是固定的数，这样，乒乓球的弹跳运动的不变性可以用下述方程来表述：

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{不变量} \tag{6.1.4}$$

我们称 mgz 为乒乓球的重力势能。在弹跳过程中，乒乓球的动能及重力势能都不是不变的，但是它们的和却保持不变，或守恒。图 6.2 上的三条线，分别是乒乓球的动能、重力势能及它们的总和与高度 z 的关系。z 越大则重力势能越大，而动能越小；z 小时，则相反。我们可以解释为：在下落过程中，质点的重力势

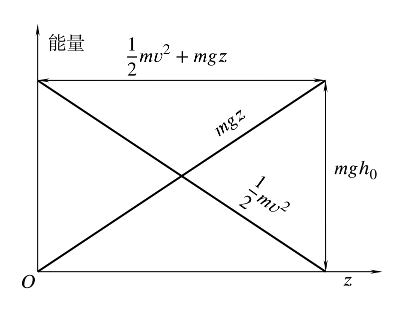


图 6.2　落体运动的动能、势能及总能

能渐渐转化为它的动能，而在上弹过程中，质点的动能渐渐转化为它的重力势能，这两种形式的能可以相互转化，但总量不变。

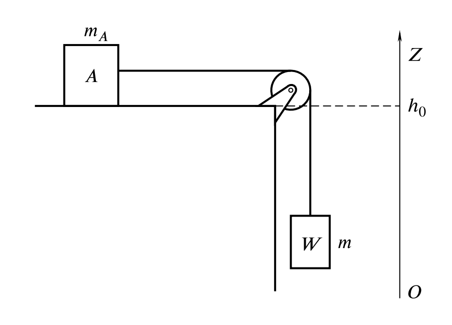


图 6.3　物体在重力作用中的守恒量

对于不是周而复始的运动，也存在类似的不变量，我们举一个例子来说明。如图 6.3，重物 W 从 h_0 位置拉着在光滑桌面上的物体 A 一起运动。如果初始条件是：$t=0$ 时，W 位于 h_0，速度为零，则 W 的位置及速度的解为

$$v=\frac{m}{m+m_A}gt$$

$$z=h_0-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+m_A}gt^2$$

利用上式计算 W 的动能及重力势能之和：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}mv^2+mgz\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{m}{m+m_A}\right)^2g^2t^2+mg\left(h_0-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{m+m_A}gt_2\right)\\&=mgh_0-\frac{1}{2}m_A\left(\frac{m}{m+m_A}\right)^2g^2t^2\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

由于结果含 t，表示 W 的动能及重力势能之和不再守恒了。但是，我们注意到，这个运动所产生的后果，不仅引起了 W 的运动，而且还引起了 A 的运动。当 W 具有速度 v 时，A 也具有速度 v，故 A 具有有动能 $\frac{1}{2}m_Av^2=\frac{1}{2}m_A\left(\frac{m}{m+m_A}\right)^2g^2t^2$，这样，式(6.1.5)

可改写为

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}m_A v^2 = mgh_0$$

这个结果告诉我们，在运动过程中，物体 W 与物体 A 的能量都在变化着，但二者的动能与重力势能之和不变化，是守恒的，即

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}m_A v^2 = \text{不变量} \tag{6.1.6}$$

一般地说，对每个质量为 m 的质点，我们可以定义它的动能为

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

在重力作用下的质量为 m 的质点，可以定义它的重力势能为

$$V = mgz$$

动能和势能是描写机械运动的重要的物理量，它们的重要之处就在于由这些量常常能构成一些不变量。在运动过程中，物体的动能和势能一般会发生变化，一物体的动能和势能之间会发生转化，物体之间的动能和势能也会发生转化。但对有些机械运动来说，参与运动的各物体的动能工及势能 V 之和保持不变。物体体系的动能和势能总称为机械能。所以，这条规律又称为机械能守恒定律，可以表示成

$$E = T + V = \text{不变量} \tag{6.1.7}$$

其中 E 表示体系的能量，它的量纲是 $[E] = [m][v^2] = ML^2T^{-2}$，在 MKS 制 (或 SI) 中，它的单位是焦耳，一个焦耳的能等于质量 1 千克的物体以速度 1 米/秒运动时所具有的动能。

机械能守恒定律〔式(6.1.7)〕，对于许多运动并不成立。滑行着的自行车会慢慢停下来，它的机械能慢慢在减小。可以说凡有摩擦力参与的运动，其机械能一般是不守恒的。

那么，这些机械能是否不留痕迹地消失了？不是的，摩擦的结果使接触面处的温度升高了。如自行车机械能消失了，路面与

轮接触处温升的热能却作为“痕迹”留下了。温度是物质中分子无规运动的表现。分子无规运动的动能愈高，物质的温度也愈高。所以，自行车的机械能并没有消失，而是转化成分子无规运动的能量，即物体的内能。这时机械能守恒定律〔式(6.1.7)〕不再成立。但是，如果考虑到机械能转化成内能，可以把式(6.1.7)推广成为

$$T + V + \text{内能} = \text{不变量}$$

这就是更一般的能量守恒定律。

物理现象中，除了机械能，内能之外，还有许多其他形式的能量，诸如与原子间作用相联系的化学能，与电磁作用相联系的电磁能、辐射能，与原子核间作用联系的核能等等。在一般的运动过程中，个别形式的能量是变化的，不同形式的能量之间可以相互转化，但如果我们计及所有形式的能量，则对任何运动过程，能量的总和是不变的、守恒的。这个最一般的能量守恒定律，是一条非常普适的物理规律，它被现今的所有实验所证实。

这一节的分析告诉我们，寻找运动中的不变量或守恒量是很有用的一种方法。因为，不变量往往能更清楚地描写运动，标志运动的特征；而且，守恒的物理量往往有更大的适用范围，象能量这一概念，适用于牛顿力学所讨论的机械运动，同样又适用于牛顿力学所不能讨论的其他运动形态。

6.2 功

质点的一定的运动状态具有一定的动能。质点的运动状态变化，它的动能常常也要随之变化。现在我们定义动能的变化过程为作功，动能的变化量作为功的数量。若在 t_1 时刻，质点的动能为 T_1；在 t_2 时刻，变化到 T_2，则在 t_1 与 t_2 之间的时间里，作功的数量为

$$A = T_2 - T_1 \tag{6.2.1}$$

它的物理意义是，要使质点的动能从 T_1 变到 T_2，就要对质点作功。若 $T_2 > T_1$，即质点动能增加，作功为正；若 $T_2 < T_1$，即质点动能减小，作功为负。

沿用运动学中的方法，我们可以定义动能的平均变化率：

$$\langle P \rangle = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{6.2.2}$$

$\langle P \rangle$ 称为 t_1 到 t_2 时间间隔内的平均功率。同样，瞬时功率定义为

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{6.2.3}$$

为了弄清功、功率与他力学量之间的关系，我们首先来讨 论

图 6.4 质点在力作用下的一维运动

一维直线运动。如图6.4所示，质量为 m 的质点在沿 x 方向的力 $\mathbf{F}$ 作用下，t_1 时刻在 x_1 处，t_2 时刻运动到 x_2。根据牛顿第二定律，有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$$

两边同乘 v，得

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Fv$$

亦即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fv$$

或
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = Fv$$

所以
$$P = Fv \tag{6.2.4}$$

式(6.2.4)就是一维情形下的功率、力、速度三者间的普遍关系。

由功的定义，显然有

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P \, \mathrm{d}t \tag{6.2.5}$$

利用式(6.2.4)，得

$$A = \int_{t_1}^{t_2} Fv \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

所以

$$A = \int_{\substack{x_1 \\ (l)}}^{x_2} F \, \mathrm{d}x \tag{6.2.6}$$

式(6.2.5)及式(6.2.6)表示质点在 t_1 到 t_2 时间间隔里，或从 x_1 运动到 x_2 的过程中所涉及的功。因此，从上式我们进一步看清，作功必定涉及到一个过程。功是度量过程的物理量，它与速度、加速度、能量等度量物体瞬时性的物理量有很大差别。谈某一瞬时或某一点的功，是没有意义的。式(6.2.6)中积分限的写法，就是为了表达功是过程量，要对运动的过程积分。譬如图6.5 中，若质点运动的过程是从 x_1 到 x_3 再到 x_2，则积分应由 x_1 到 x_3，再由 x_3 到 x_2，而不是仅由 x_1 直接积到 x_2(当然，在特殊条件下，可由 x_1 直接积到 x_2)。

图 6.5 积分的过程

容易将式(6.2.4)及式(6.2.6)推广到三维情况。这时，牛顿力学规律是

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$$

等式两边点乘 $\mathbf{v}$，则有

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

因此，代替式(6.2.4)，是

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{6.2.7}$$

代替式(6.2.6)，是

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$$

因为 $\mathbf{v} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$，故

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\substack{\mathbf{r}_1 \\ (l)}}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{6.2.8}$$

其中 (l) 表示沿着质点的运动轨道积分。由式(6.2.8)可得，质点在位移 $\Delta\mathbf{r}$ 上，外力 $\mathbf{F}$ 作功等于

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = |\mathbf{F}|\,|\Delta\mathbf{r}| \cos\theta \tag{6.2.9}$$

其中 θ 是力 $\mathbf{F}$ 与位移 $\Delta\mathbf{r}$ 之间的夹角。

6.3 引力势能

在6.1节，我们曾指出，地面附近的质点具有重力势能 mgz，现在更一般地讨论万有引力势能。

如图6.6所示，物体 M 对质点 m 的万有引力在二者连线方向，大小为

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

如果我们将 m 沿着连线方向(图6.6 中是径向方向) 从 1 移至 2，即从 $\mathbf{r}_1$ 到 $\mathbf{r}_2$ $\left(\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}\right)$，当移动距离 $\Delta\mathbf{r}$ 很小时，引力 F 作

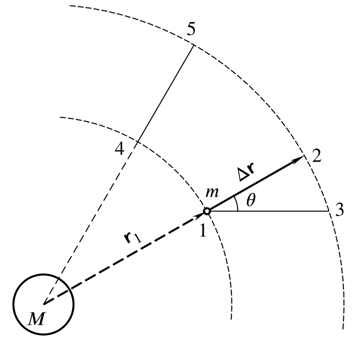


图 6.6 引力作的功

的功近似为

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = -G\frac{mM}{r_1^2}\Delta r$$

负号是由于力的方向与位移方向反平行。再考虑 m 从 1 移到 3，在这条路径上力与位移夹角为 $(\pi - \theta)$，而位移大小为 $\Delta r/\cos\theta$，所以引力功近似为

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \frac{GmM}{r_1^2} \cdot \frac{\Delta r}{\cos\theta} \cdot (-\cos\theta) \\ &= -G\frac{mM}{r_1^2}\Delta r \end{aligned}$$

而在从 3 移到 2 的路径上，引力总是与位移垂直，所以不作功。因此，我们证明了路径 $1 \to 3 \to 2$ 引力作功与相应的径向路径 $1 \to 2$ 上引力作功相同，这是万有引力作功的第一个性质。再则，按图 6.6，如果 4 及 5 与 M 的距离也分别是 r_1，r_2，并且 $4 \to 5$ 在径向方向，那么引力在 $4 \to 5$ 的路径上所作的功与在 $1 \to 2$ 上所作的功相同，因为引力的大小只与 m 及 M 之间的距离有关，而与方向无关。这是引力作功的第二个性质。

有了上述两点，现在可以进行下面的证明：如图6.7，当质点由 a 运动到 b 时，对于任意两条路径，如 s_1 及 s_2，万有引力作功相同。首先画出一系列与 M 等距的面，在图上用虚线圆弧表示，它们将 s_1, s_2 分割成许多非常小的小段，这些小段可以认为是直线。然后在

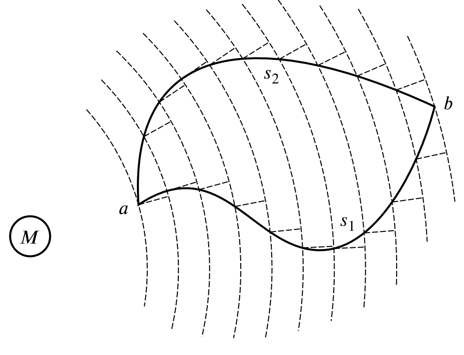


图 6.7　引力作功与路径无关

每个小段处画出相应的径路径，图上用径向虚线段表示。现在，用上面所证明的第一个性质可得，在 s_1 或 s_2 上作的功与图中各相应的所有径向小段上作功的总和相等。再利用上述第二个性质，即得在 s_1 及 s_2 的相应径向小段上作功相等，因而沿 s_1 及 s_2 引力作功相等。

读者可能还会认为，s_2 并不够一般，如果取图 6.8 中那样的 s_3 结果如何？用同上的方法，不难证明，沿着 s_3 由 a 到 b 与沿 s_1 由 a 到 b，引力作功相等。因为在从 a 到 c 和从 c 到 d 各对应小段上，功的绝对值相同，但由于位移方向相反，故其功正好相互抵消，所以在沿 s_3 由 a 到 c 再到 d，引力作功为零。因此，沿 s_1 或 s_3 由 a 到 b，引力作功仍然相同。

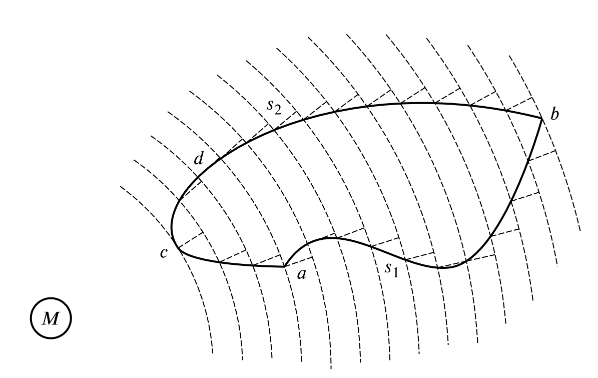


图 6.8 引力作功与路径无关

这样，我们证明了万有引力作功与路径无关的基本性质。因此，由 a 到 b，引力作功可写为

$$A=\int_{(l)} F\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=-\int_{r_a}^{r_b}\frac{GmM}{r^2}\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{GmM}{r_b}-\frac{GmM}{r_a} \tag{6.3.1}$$

根据功的定义，我们有

$$A = T_b - T_a \tag{6.3.2}$$

由式(6.3.1)、(6.3.2)，可得

$$\frac{GmM}{r_b} - \frac{GmM}{r_a} = T_b - T_a$$

或

$$\begin{aligned} & T_a + \left(-\frac{GmM}{r_a}\right) \\ =& T_b + \left(-\frac{GmM}{r_b}\right) = \text{不变量} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

由式(6.3.3)看到，我们找到了质点在引力作用下的一个不变量。因为 a，b 是任意的，所以式(6.3.3)可一般地写为

$$T + \left(-\frac{GmM}{r}\right) = \text{不变量} = E \tag{6.3.4}$$

我们定义

$$V \equiv -\frac{GmM}{r} \tag{6.3.5}$$

为引力势能，则 E 就是总机械能。式(6.3.4)就是我们前面讲过的机械能守恒定律在引力场中的表达式。

以上讨论的关键点是引力作功与路径无关，正是由于这一点，我们才有可能定义引力势能。

再次指出，式(6.3.4)所描写的物理性质并没有超出动力学基本方程 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$。原则上讲，动力学方程已包括式(6.3.4)。但在处理某些问题时，直接用式(6.3.4)会更加简便，更容易看清物理的实质。下面举几个实例来说明这一点。

根据式(6.3.5)，可以画出引力势能与径向位置的关系，如图 6.9 所示。从图中容易看出，当 $r \to \infty$ 时，引力势能趋于零。由这幅图，我们可以很方便地讨论许多问题。

我们知道，质点在引力作用下运动时的总能量 E 是常数，即

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}=\text{不变量}$$

因此，在上图中，E 是一条平行于 r 轴的直线。由于动能不可为负，所以当 $E<0$ 时，m 与 M 间的最大距离应为

$$r_{\max}=\frac{GmM}{|E|}$$

从图6.9中容易看出，当 $E<0$ 时，质点只能在 $r=0$ 到 $r=r_{\max}$ 之间运动，这种运动称为束缚运动。当 $E\geqslant 0$，E 线在横轴以上，它不与 $V_{\text{引}}$ 线相交。所以质点可以在 $r=0$ 到 ∞ 的整个范围里运动。这种运动称为自由运动。

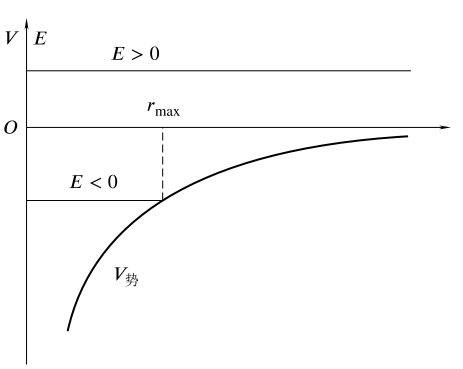


图 6.9　引力势能

由图6.9不难求出第二宇宙速度，即从地球发射的人造行星所需要的最低速度。人造行星是逃离地球引力作用的东西，也就是说它对地球引力已成为自由运动。因此，在这种情况总机械能 E 至少为零，所以在发射时，它的速度至少应为

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM_{\text{地}}}{R}=0$$

其中 R 为地球半径。故

$$v=\sqrt{\frac{2GM_{\text{地}}}{R}}$$

由于 $g=\dfrac{GM_{\text{地}}}{R^2}$，所以

$$v = \sqrt{2gR} \approx \left(2 \times 10 \times 6.4 \times 10^6\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx 11.3 \times 10^3 \text{米/秒}$$

下面我们讨论宇宙飞船从地球飞往月球的问题。图 6.10 给出地-月系统的势能图。如果飞船的发射速度过低，即 E 小，则飞船只能在地球附近运动，不可能到达月球；发射速度过高，即 E 大，飞船也不会落到月球引力束缚范围，而可能远离地-月体系，成为太阳的行星。因此发射能量只能控制在如图所示的非常小的可调范围内，才能离开地球到达月球引力束缚的范围，然后再设法进一步减速，落到月球上。再有，不仅要把发射能量控制在一个非常窄的范围内，还必须把飞行轨道控制在一个非常小的空间区域里，才能到达月球。

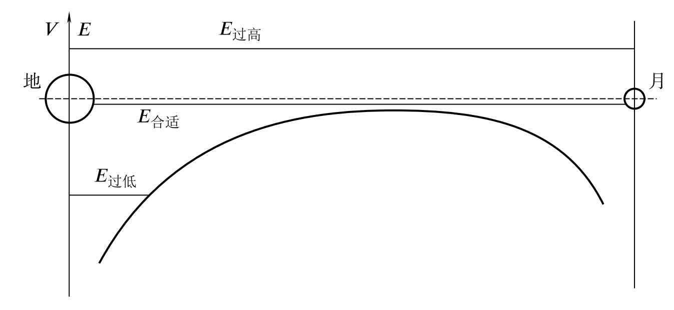


图 6.10　地-月系统势能图

最后应当指出，引力势能实际上是属于 m 及 M 二者组成的体系的，因势能决定于二者之间的相对距离。其他的势能也有同样特点，也应是属于一个体系的。物体在不同高度上的重力势能，确切地说应是属于物体及地球组成的体系的，但由于在这势能转化过程中地球的运动状态的改变完全可以不计，所以我们可以采用“物体的重力势能”这种虽不确切但完全适用的说法。

宇宙间的物质都参与万有引力的作用，引力势能是最常见的

一种能量形式。就宇宙范围来说，自然界的大部分能量，都是以引力势能形式存在的。

6.4　保　守　力

我们已经证明在引力作用下，质点的运动遵守下列形式的能量守恒：

$$T + V = \text{不变量} \tag{6.4.1}$$

现在我们一般地来讨论在什么条件下上式成立或不成立，即满足上式的运动应有什么性质。

我们曾指出，一般说来，作功是与路径有关的。因为从功的定义 $A = T_2 - T_1$，一般并不能推出式 (6.4.1)。在引力情况，由于有

$$A = V_1 - V_2 \tag{6.4.2}$$

所以式(6.4.1)才成立。式(6.4.2)正是表示引力作功与路径无关。

如果有摩擦力，情况就完全不同。我们来讨论图 6.11 的固定斜面，设各面的摩擦系数均为 μ。若质点沿 $1 \to 2$ 自由下落，则质点只受重力作用，重力作功为

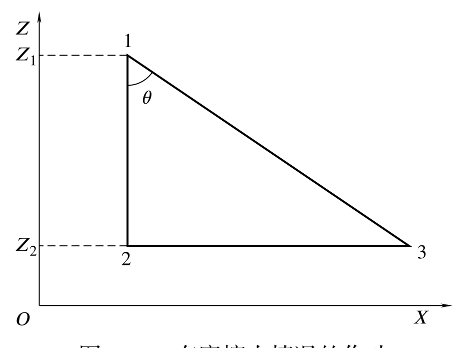


图 6.11　有摩擦力情况的作功

$$A_{重_{1\to2}} = mg\left|Z_2 - Z_1\right|$$

而摩擦力作功为零，即

$$A_{摩_{1\to2}} = 0$$

质点沿 1 → 3 下滑，则位移大小为 $\dfrac{\left|Z_2 - Z_1\right|}{\cos\theta}$ 重力作功为

$$\begin{aligned} A_{重_{1\to2}} &= mg\frac{\left|Z_2 - Z_1\right|}{\cos\theta}\cos\theta \\ &= mg\left|Z_2 - Z_1\right| \end{aligned}$$

而摩擦力大小为 $\mu mg\sin\theta$，摩擦力与位移的夹角是 180°，所以摩擦力作功为

$$\begin{aligned} A_{摩_{1\to3}} &= \mu mg\sin\theta\frac{\left|Z_2 - Z_1\right|}{\cos\theta}\cos 180^\circ \\ &= -\mu mg\left|Z_2 - Z_1\right|\operatorname{tg}\theta \end{aligned}$$

质点再从 3 到 2，位移大小为 $\left|Z_2 - Z_1\right|\operatorname{tg}\theta$，重力不作功，而摩擦力作功为

$$A_{摩_{3\to2}} = -\mu mg\left|Z_2 - Z_1\right|\operatorname{tg}\theta$$

故

$$A_{重_{1\to3}} + A_{重_{3\to2}} = A_{重_{1\to2}}$$

$$\begin{aligned} A_{摩_{1\to3}} + A_{摩_{3\to2}} &= -2\mu mg\left|Z_2 - Z_1\right|\operatorname{tg}\theta \\ &\neq A_{摩_{1\to2}} \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

因此，重力作功与路径无关，而摩擦力作功与路径有关。对上述问题，“与路径有关”就表现在式(6.4.3)中含有 θ，θ 不是初始点的性质，也不是终止点的性质，而是路径的性质，表示了路径的形式。

这样，我们可以把自然界中的力分成两大类，一类力作的功

只与路径的始末点有关，而与路径的具体形式无关，我们称之为保守力；另一类则与路径的形式有关，称之为非保守力。从上述讨论中我们可知，重力和引力都是保守力，摩擦力是一种非保守力。

对于保守力，我们可以定义一个空间函数，即

$$V\left(\mathbf{r}_b\right)=V_a-A_{a\to b} \tag{6.4.4}$$

式中 V_a 是我们在 a 处任意选定的一个数；$A_{a\to b}$ 是由 a 到 b 时保守力作的功。因为 $A_{a\to b}$ 只与 a,b 位置有关，而与路径形式无关，所以 $V\left(\mathbf{r}_b\right)$ 只是位置 $\mathbf{r}_b$ 的函数，我们称 $V\left(\mathbf{r}_b\right)$ 为该保守力的势能函数。

对于非保守力，虽然形式上也可写成

$$V\left(\mathbf{r}_b\right)=V_a-A_{a\to b}$$

但因为 $A_{a\to b}$ 不仅和 $\mathbf{r}_b$ 有关，而且与路径有关，对于多种路径，$A_{a\to b}$ 有多种可能值，所以对同一个 $\mathbf{r}_b$，$V\left(\mathbf{r}_b\right)$ 也有多种可能值，因此它并不是位置的函数，也就不能应用势能概念。

我们可以把式(6.4.4)改写为

$$A_{a\to b}=V_a-V_d \tag{6.4.5}$$

式中 $V_b=V\left(\mathbf{r}_b\right)$，$V_a=V\left(\mathbf{r}_a\right)$，分别表示 a，b 点的势能，再根据功的定义

$$A_{a\to b}=T_b-T_a \tag{6.4.6}$$

就得到

$$T_a+V_a=T_b+V_b=\text{不变量} \tag{6.4.7}$$

这样，我们就证明了，如果质点只受保守力作用，质点的运动就遵从机械能守恒（式(6.4.1)）。

反过来，如果一个体系的运动遵守式(6.4.1)，即

$$T_a + V_a = T_b + V_b$$

则有

$$T_b - T_a = V_a - V_b$$

再由功的定义

$$A_{a\to b} = T_b - T_a$$

就得到

$$A_{a\to b} = V_a - V_b$$

这就是说，在这种情况下作功仅与始末点有关，而与路径无关，故力是保守力。

总之，式(6.4.1)成立或势能概念适用的充要条件，是体系中只存在保守力的作用。

6.5 一维运动的一般性质

现在我们讨论一维运动。例如沿着直线的运动，并假定力是保守的用 x 表示位置坐标。

由一维情况功与力的关系式6.2.6

$$A_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F \, \mathrm{d}x$$

以及力是保守的，即

$$A_{1\to 2} = V\left(x_1\right) - V\left(x_2\right)$$

有

$$V\left(x_1\right) - V\left(x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} F \, \mathrm{d}x$$

由此可知，一维情况下的保守力 F 可表示为

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{6.5.1}$$

或者，凡是能表示成式(6.5.1)形式的力一定是保守力。例如，对于

自由落体运动，如果取坐标 x 为从地面算起的高度，则其势能函数分别为

$$F = -mg \qquad V = mgx + V_0$$

其中 V_0 为任意常数。由选择势能的零点所确定。若选择地面 (即 $x = 0$) 处的势能为零，则 $V_0 = 0$ 。

一维情况的质点的机械能守恒，有下列的形式：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E \tag{6.5.2}$$

由于质点的动能 $\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$ 不能为负值，所以上式给我们一个不等式

$$E \geqslant V(x) \tag{6.5.3}$$

这个不等式的物理意义是很显然的，它表示质点的总能量总是大于或等于势能。根据这个论断，只要知道了势能函数 $V(x)$ 以及质点的能量，不必详细求解运动方程，质点的运动范围就完全确定了。下面举例说明。

设质点的势能函数 $V(x)$ 如图6.12所示，这种曲线常称为势能

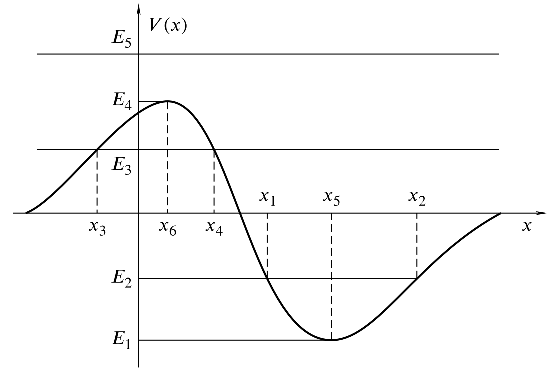


图 6.12　势能函数及运动性质

曲线，图6.2中的 mgz 线就是重力势能曲线。

由图6.12, 如果质点的能量 $E = E_2$, 则不等式(6.5.3)要求 $x_1 < x < x_2$, 这表示具有能量 E_2 的质点只能在 x_1 与 x_2 之间运动, x_1 与 x_2 是方程 $V(x) = E_2$ 的两个根。这种在有限范围中的运动称为束缚运动。对于图6.12所表示的势能函数, 当质点能量在 $E_1 \leqslant E \leqslant 0$ 时，都是作束缚运动。

当质点能量 $E > 0$ 时，运动范围可以延伸到无限远。例如，当 $E = E_3$ 时，质点可以在 $-\infty < x \leqslant x_3$，或者 $x_4 \leqslant x < \infty$ 两个无限的范围中运动，其中 x_3，x_4 是方程 $V(x) = E_3$ 的两个根。当 $E = E_5$，时，质点可以在整个 x 的范围，即 $-\infty < x < \infty$ 中运动。这种具有无限范围的运动，称为非束缚的，或自由运动。

对于 $E = E_3$ 情况，如果开始时质点在 $x > x_4$ 的范围中运动，则它永远不会跑到 $x < x_3$ 的范围中去。因为从 $x > x_4$ 到 $x < x_3$，必须经过 $x_3 < x < x_4$, 而这一范围质点是不可能进入的。所以, 对于能量为 E_3 的质点来说，势能函数的作用相当于在 $x_3 < x < x_4$ 范围中造成一个不可逾越的壁垒，常称为势垒。

当 $E = E_1$ 时, 质点只能处于 $x = x_5$ 点, 它的动能为零, 速度为零, 所以, 这是静止的质点。从受力的角度来分析, 由于 $x = x_5$ 是 $V(x)$ 的极小点，故有

$$F\left(x_5\right) = -\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_{x_5} = 0$$

即处在 $x = x_5$ 的质点并不受力。所以, 它能保持速度为零的状态, 即静止的状态。

当质点处于 $x = x_6$ 时，同样有

$$F\left(x_6\right) = -\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)_{x_6} = 0$$

也是不受力的。因此, 对于能量为 $E_4 = V\left(x_6\right)$ 的质点，在 $x = x_6$ 处的动能为零，速度为零，并也能保持速度为零的状态不变，处于静止。

但是，$E=E_1$，及 $E=E_4$ 两种静止状态是十分不同的。在前一情况，不等式(6.5.3)要求质点只能处于 $x=x_5$；而在后一情况，质点可以处于 $-\infty<x<\infty$ 整个范围。所以，前一种静止状态是稳定的，它不可能离开静止状态；后一种静止是不稳定的，它可以偏离静止变成运动状态。

讨论了运动范围之后，我们来讨论运动解。

由式(6.5.2)，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V\left(x\right)\right)}$$

正号和负号分别表示沿正 x 及负 x 方向的运动。积分上式，就得到

$$t=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V\left(x\right)}} \tag{6.5.4}$$

利用上式可以求出作束缚运动的质点从 x_1 到 x_2(图 6.12) 所用的时间，即

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_2-V\left(x\right)}} \tag{6.5.5}$$

当质点到了 x_2，它的速度变为零，因为 $E_2=V\left(x_2\right)$。但在 x_2 点，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}>0$，所以，$F<0$，即力是指向负 x 方向的，这个力使质点发生沿着负 x 方向运动，也就是说，力使质点在 x_2 处改变运动方向，质点从 x_2 回到 x_1 所用的时间为

$$-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_2}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_2-V\left(x\right)}} \tag{6.5.6}$$

根据上述类似的讨论可知，质点到达 x_1 后，运动方向也发生变化，从负 x 方向变为正 x 方向。总之，束缚运动是质点在 x_1 与 x_2 之间来回振荡的运动。质点完成一个运动循环 (从 x_1 到 x_2 再回到 x_1) 的时间，称为周期。由式(6.5.5)及式(6.5.6)二者之和，就

可以求出周期是

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E_2 - V(x)}} \tag{6.5.7}$$

可见运动周期一般是与质点的能量有关的。

【例 1】 如果势能函数为

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2} \\ \infty, & x < -\dfrac{l}{2}, x > \dfrac{l}{2} \end{cases}$$

就称为方势阱，它的势能曲线见图6.13。

当质点在位于 $x = \pm\dfrac{l}{2}$ 的两个刚性壁之间运动时，它的势能函数就近似是一方势阱。在这种势能函数下，无论什么能量，运动都是束缚的，运动范围限制在 $-\dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}$ 之间它的运动周期，按式(6.5.7)可以求得为

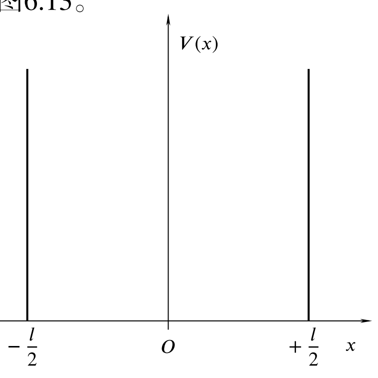


图 6.13 无限深的方势阱

$$T = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2m}{E}}l$$

在运动范围中，$V = 0$，所以 $E = \dfrac{1}{2}mv^2$，因此上式还可以写成

$$T = \frac{2l}{v}$$

这个结果是显然的，它表示以速度 v 运动的质点来回一周所需的时间。

【例 2】　注意第五章的式(5.5.7)，即

$$\left[\frac{1}{R_0}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)\right]^2-\frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{1}{\left(\dfrac{R}{R_0}\right)}=K \tag{6.5.8}$$

它在形式上与式(6.5.2)是相似的，现在 R 相当于 x，式中第一项相当于宇宙膨胀的动能，第二项是引力势能，而 K 是“总能”。我们在第五章中已指出，当 $K<0$ 时，宇宙膨胀将来会停止，而变成收缩。

从一维运动的观点看，由式(6.5.8)所描写的一维运动，当 $K<0$ 时是束缚的运动。因此，我们可以计算 R 从 0 增大到 $R_{\max}$(相当于整个宇宙膨胀阶段) 再从 $R_{\max}$ 回到 0(相当于将来发生的宇宙收缩阶段) 整个需要多少时间。利用类似于推求式(6.5.7)的方法，可以推求出宇宙完成一个膨胀收缩循环的时间为

$$t=2\frac{1}{R_0}\int_0^{R_{\max}}\frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{\dfrac{8\pi G}{3}\rho_0R_0\dfrac{1}{R}-|K|}} \tag{6.5.9}$$

其中

$$R_{\max}=\frac{8\pi G\rho_0R_0}{3|K|}$$

作变量代换

$$R'=\frac{R}{\left(\dfrac{4\pi G\rho_0R_0}{3|K|}\right)}$$

式(6.5.9)成为

$$\begin{aligned}t&=\frac{8\pi G\rho_0}{3|K|^{3/2}}\int_0^2\frac{\mathrm{d}R'}{\sqrt{\dfrac{2}{R'}-1}}\\&=\pi\frac{8\pi G\rho_0}{3|K|^{3/2}}\end{aligned} \tag{6.5.10}$$

如果我们当今宇宙中的平均质量密度 ρ_0 是临界密度 ρ_c 的 2 倍，即

$$\rho_0 = 2\rho_c = 2\frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{6.5.11}$$

则由式(5.5.12)有

$$K = -H_0^2 \tag{6.5.12}$$

将式(6.5.11)及式(6.5.12)代入式 (6.5.10)，得到

$$t = 2\pi\frac{1}{H_0} \tag{6.5.13}$$

再利用式(5.4.6)给出的观测值 H_0 就得到

$$t \approx 1.26 \times 10^{11}\text{年}$$

这就是宇宙的演化时间尺度。

思　考　题

1. 在粗糙的水平面上以及在光滑的水平面上分别放置相同的两个物体 A 和 B，各施以相同的力 F，推行了相同的距离 s。两种情况下 F 作的功是否相等？产生的后果是否相同？

2. 若某力对物体不作功是否对物体运动就没有影响？

3. 子弹水平地射入一静止放置在光滑平面上的木块阻力对子弹作正功还是作负功？木块所受的力对木块作正功还是作负功？

4. 一个质点在几个力同时作用下的位移为 $\Delta\mathbf{r} = (4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ 米，其中有一个力可表达成 $\mathbf{F} = (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k})$ 牛顿。这个力在这过程中作功多少？

5. 功的数值与参考系的选择有关吗？动能的数值与参考系的选择有关吗?有关功能的一些关系式，如式(6.2.1)、(6.2.4)、(6.2.7)是否对任何参考系都正确？

6. 试分别选取地面、水流为参考系来讨论下面两个问题，并比较两种参考系中的结果。

(1) 一个人逆水划船，使船相对于岸静止不动，他是否作功？

(2) 如果他停止划船，让船顺流而下，流水对船是否作功？

7. 试判断以下各系统的机械能是否守恒：

(1) 物体自由下落，以物体及地球作为一个系统，不计空气阻力；

(2) 物体上抛，以物体及地球作为一个系统，空气阻力不能忽略；

(3) 物体沿固定斜面下滑，以物体及地球作为一个系统，分别考虑有、无摩擦两种情形；

(4) 用拉力 **F** 使物体匀速上升，以物体及地球作为一个系统；

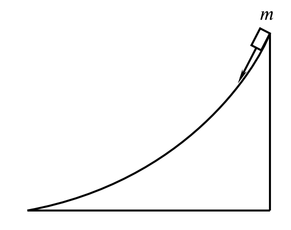
(5) 单摆的自由摆动，以摆及地球作为一个系统，不计空气阻力；

(6) 子弹水平地射入放在光滑水平面上的木块，以子弹及木块作为一个系统；

(7) 一球 (或一圆盘) 沿固定斜面无滑动地滚下，以物体及地球作为一个系统。

8. 把一挂着的铁链对折，使它的下端和上端挂在一起。若铁链质量为 m，长为 l，要作多少功？

9. 在高为的固定斜面顶上，一质量为 m 的小物体由静止开



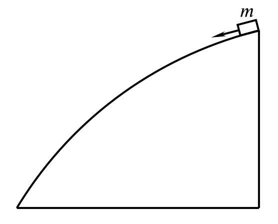


图 6.14

始下滑。求物体滑到斜面底时的速度大小若斜面是凹的或凸的(图6.14) 结果怎样?

10. 在地面附近 (可以认为 g 是常数)，以不大的初速度 v_0 上抛一个物体，不计空气阻力，问物体可上升多高? 若以 v_0 斜抛此物，上升的最大高度又为多少?

11. 若忽略地球自转，不计空气阻力，试问，逃逸速度与发方向有关吗? 若考虑到地球的自转，人造行星应当向什么方向发射才比较有利?

12. 第四章习题 3 中指出，飞船从地球飞向月球的途中，在通过地球引力区与月球引力区的分界线时，地、月对飞船的引力都非常小。试问，此时太阳对飞船的引力也非常小吗? 如若不然，要注意什么问题? 否则将会造成什么后果?

13. 试解释，在荡秋千时，人怎样只依靠身体的曲伸使秋千从静止逐渐振荡起来。

习　　题

1. 拉碾子时，若地面对碾子的阻力是 50 牛顿，当拉杆与地面夹角为 30° 时，问：至少需要多大的力才能拉动? 若用此力拉行 10 米远，作功多少?

2. 水泵每分钟将 100 升水送到 20 米高的水塔，这水泵一小时内作了多少功? 如果水泵的效率为 75%，那么它的马达的功率是多少?

3. 人的心脏一昼夜平均作功约为 7.8×10^5 焦耳，试用马力表示此功率。

4. 据生理学的测定，一个大学生平均每天约消耗 2400 千卡的能量，其中大脑消耗的占 20%。问脑力劳动的平均功率 $\boldsymbol{P}$ 等于多少? 脑力劳动平均每昼夜消耗多少能量? (1 卡 = 4.18 焦耳)

5. 有一重 11 吨的电车，平均功率为 20 千瓦，行驶中平均阻力为 110 牛顿。试问：车的速度由 20 公里/小时增至 30 公里/小时，需多少时间？

6. 有一颗 15 克的子弹，以 $v = 300$ 米/秒的速度射入固定的木块，若平均阻力为 5×10^3 牛顿，求子弹进入木块的深度。

7. 把一长为 L、质量为 m 平放在地上的细杆竖立起来，另一端仍在原地，至少要作多少功？

8. 如图6.15 所示，一蓄水池面积为 $S = 50$ 米^2，所蓄的水面比地面低 5.0 米，水深 $d = 1.5$ 米。用抽水机把这池里的水全部抽到地面上，至少要作多少功？

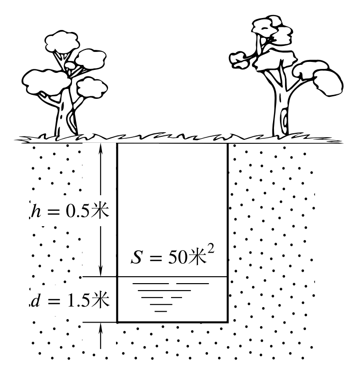


图 6.15

9. 用水泵抽水，水面低于水泵喷口 $h_1 = 2.0$ 米；水泵喷口横截面为 $a = 30$ 厘米^2，喷口仰角为 30°，喷射水流的顶点比喷嘴高出 $h_2 = 4.0$ 米，如图6.16 所示。假如水泵马达的效率为 60%，忽略空气阻力，输电线供给的功率是多少？

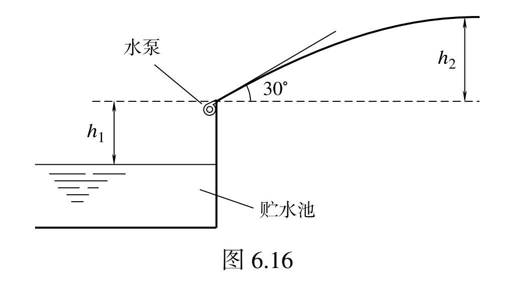


图 6.16

10. 一物体受到 $F = -6x^3$ 的力的作用，x 以米为单位，F 以牛顿为单位。物体从 $x = 1.0$ 米移到 $x = 2.0$ 米时，力 F 作了多少功？

11. 有一缓慢改变倾角的固定斜面，如图6.17 所示，其斜面与水平部分的摩擦系数都相同。今有一物体从高为处自由下滑，最后停在离起点的水平距离为 s 的水平面上。试证：$\mu = h/s$。

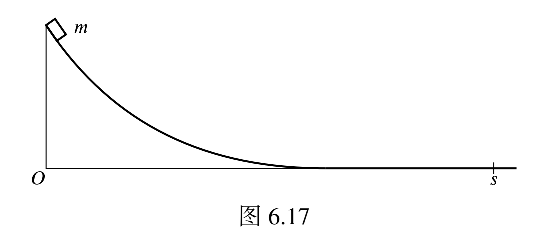


图 6.17

12. 从功能关系出发，试证明，质量为 M 的汽车，以速度 v 沿水平公路行驶时，要它停下来所需的最短距离为 $v^2/2\mu g$(μ 为汽车车轮与路面间的滑动摩擦系数)。

13. 长为 L、质量为 m 的一条细铁链，开始时长为 a 的一段垂在桌面下，拉住上端使整个铁链静止不动 (图6.18)；然后放手让它滑下。不计摩擦阻力，铁链上端离开桌面时，其下落的速度 v 是多少？

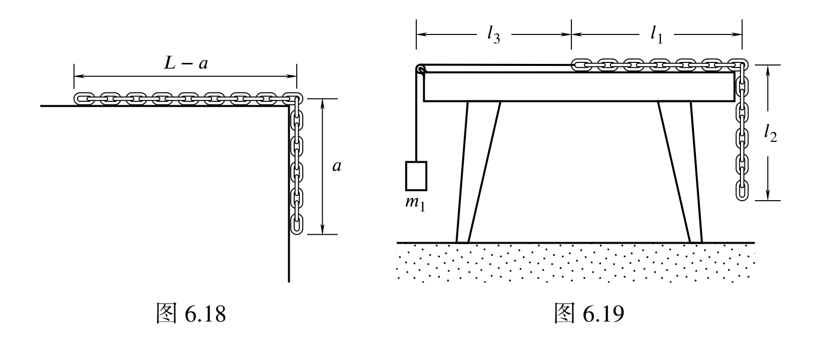


图 6.18　　　　图 6.19

14. 重 10 公斤、长 40 厘米的链条，放在光滑的水平桌面上，其一端拴一细绳，绳子通过滑轮悬着一个质量 $m_1 = 10$ 公斤的物体 (图6.19)。开始时 $l_1 = l_2 = l_3 = 20$ 厘米，系统速度为零。设绳

长不变，绳的质量及绳与滑轮摩擦可不计。当链条全部滑到桌面上 ($l_2 = l_3 = 0$，$l_1 = 40$ 厘米) 时，系统的速度 v 是多少？

15. 质量为 $m = 1.0$ 公斤的木块在一水平面上与一倔强系数 $k = 2.0$ 牛顿/米的弹簧发生正碰撞，弹簧另一端是固定的，木块将弹簧由来静止且自自伸展的位置压缩 4.0 米 (图6.20)。设木块与水平面间的滑动摩擦系数为 0.25，木块原来的速率 v_0 是多少？

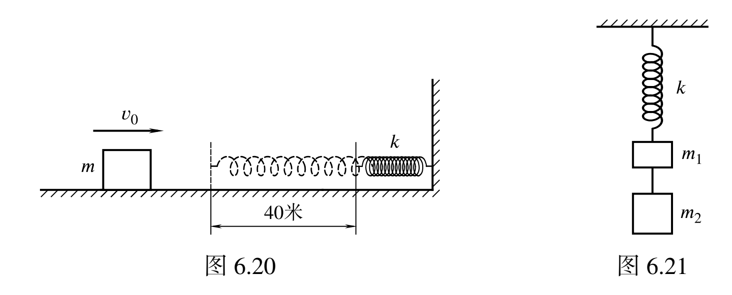


图 6.20　　图 6.21

16. 在倔强系数为 k 的弹簧下面悬挂质量分别为 m_1 及 m_2 的物体，开始时处于静止，如图6.21 所示。若突然割断 m_1 与 m_2 间的连线，试求 m_1 所能达到的最大速度 V_{max}。

17. 一物体以初速率 $v_0 = 14$ 米/秒由 240 米高处落入地面上的沙内，深达 0.20 米。试求沙对物体所施的平均阻力 F(不计空气阻力)。

18. 一个固定斜面倾角 $\alpha = 30°$，外面下端有一 100 克的小物体，开始时以 19.8 米/秒的速率沿斜面向上冲 (图6.22)，走了 20 米远便停下来，然后下滑。

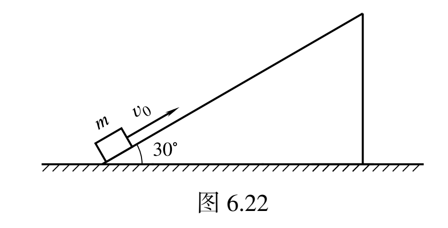


图 6.22

(1) 计算物体起始的动能和在最高点时的势能；

(2) 求斜面作用于物体的摩擦力 f_μ；

(3) 求物体滑回下端的时间。

19. 一个质量为 m 的质点在一个固定的、半径为 r 的光滑球面的顶点，从静止开始下滑，如图6.23 所示。现用图中的角度 θ 来表示质点的位置，选出发点处的势能为零。试求

(1) 以 θ 为变量的势能函数；

(2) 以 θ 为变量的动能函数；

(3) 以 θ 为变量的径向和切向加速度；

(4) 质点离开球面时刻的角度。

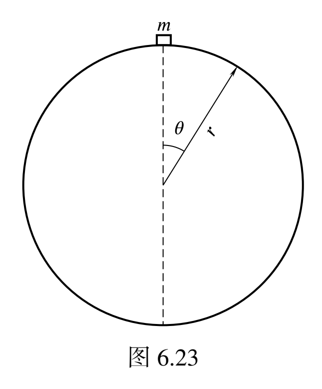


图 6.23

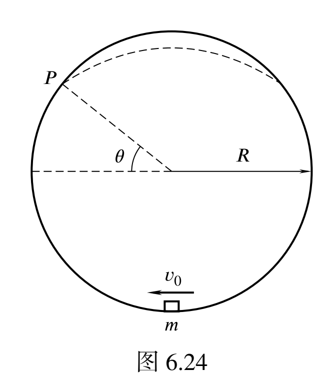


图 6.24

20. 一质量为 m 的质点在半径为 R 的竖直圆轨道内运动，设没有摩擦力，当质点在最低点时，其速率为 v_0，如图6.24 所示。

(1) v 的最小值 $v_{\min}$ 为多大时，质点还能沿着圆形轨道运动而不脱离轨道？

(2) 假定 $v_0 = 0.775v_{\min}$，则质点将在某点 P 处脱离轨道而沿图 6.24 中虚线所示的路径运动，试求 P 点的角位置。

21. 一质量为 m 的小物体从一下坡轨道的 A 点由静止出发下滑，下坡轨道的下端接着一个以 O 点为圆心、半径为 R 的圆形轨

道。设轨道都在竖直平面内 (图6.25)，A 与 O 的高度差为 h，略去摩擦。求：

(1) 它到达圆形轨道最高点 B 时的速度、它所受的力以及它作用在轨道上的力 N_B；

(2) 要使 m 不离开轨道下落，h 至少应为多少？

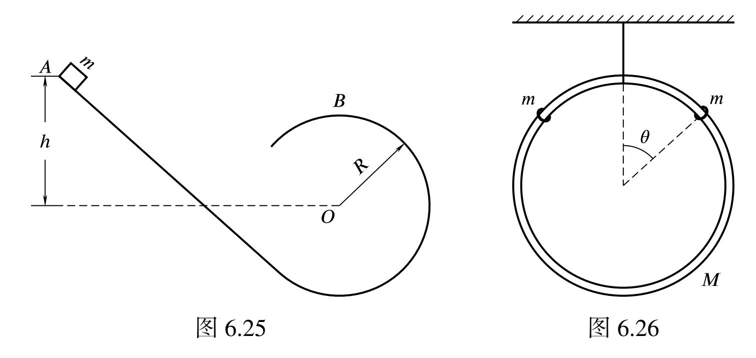


图 6.25　　图 6.26

22. 用一条细线把质量为 M 的圆环挂起来，环上有两个质为 m 的小环，它们可以在大环上无摩擦地滑动 (图6.26)。若两个小环同时从大环顶部释放并沿相反方向自由滑下，试证：如果 $m > \frac{3}{2}M$，则大环在 m 落到一定的角位置 θ 时会升起，求大环开始上升时的角度 θ。

23.(1) 一升降机匀速下降，它的吊绳突然被卡住，这时绳内的张力将怎样变化？

(2) 设升降机的质量为 $M = 3.0$ 吨，原来下降的速度为 $v_0 = 1.0$ 米/秒，绳子的倔强系数 $k = 1.00$ 吨/厘米。试计算上述过程中绳上的最大张力和相应的伸长量 (设整个过程在绳子的弹性限度内)。

24. 一质量为 M 的火车在平直轨道上匀速前进时，最后一节质量为 m 的车厢突然脱落，这车厢在走了长的路程后停止。假设机车的牵引力和列车与轨道间的摩擦系数都不变，当脱落的那节车厢停止时，列车距此车厢多远？

25. 一杂技演员从距网 $h = 10$ 米高处落到弹性网上。如果演员站在网上静止不动时，网的弯曲深为 $x_0 = 20$ 厘米。问演员从高处落到网上时对网的最大压力是演员本身重量的多少倍？

26. 一均匀球体，半径为 R，质量为 M。求离中心为处的引力势能 $U(r)$(即单位质量的位能)，并画出 U-r 曲线。

27. 求证地球表面上高度为 h 处的逃逸速度为

$$v = v_2\sqrt{\frac{R}{R+h}}$$

式中 R 是地球半径，v_2 是地球表面上的逃逸速度。

28. 在一半径为 R_0 的无空气的小行星表面上，若以速率 v_0 水平地抛出一物体，则该物体恰好环绕该行星的表面作匀速圆周运动。问：

(1) 这小行星的逃逸速度是多少？

(2) 在这星体表面竖直上抛一物体，要使它达到 R_0 的最大高度，上抛速率是多少？若要使该物体达到 $\frac{1}{2}R_0$ 的高度，上抛速率又应是多少？

(3) 一质量为 m 的物体，在离该星表面上高度为 $y\left(y < R_0\right)$ 处，它的位能是多少？〔展成 y/R_0 的级数，保留到 $\left(y/R_0\right)^2$ 项。〕

(4) 如果 $y \ll R_0$，要使物体从行星表面升到 y 的高度，它的上抛速率至少为多少？〔与 (3) 一样作近似，保留到 $\left(y/R_0\right)^2$ 项。〕

29. 质量为 m 和 M 的两个质点最初处于静止态状并相距无穷远，试证：由于引力作用，它们在任何时刻互相趋近的相对速度为 $\sqrt{2G(M+m)/d}$。这里 d 是在该时刻两质点间的距离。

30. 两个质量均为 1.0 克的质点，相距 10 米。开始时相对静止，如果它们之间只有引力作用，它们何时相碰?

31.(1) 无穷远处的流星相对地球中心的速度很小，它在地球引力作用下落到地面，若不计空气阻力，试问：它将以多大的速度落到地球表面。

(2) 实际上，阻力不可忽略。设只有径向运动，且阻力数值与速度成正比，试列出其运动方程。

(3) 下雨的过程都发生在对流层，在这区间，重力加速度 g 可认为是常数。试问：一个质量为 m 的雨滴将以怎样的速度落到地面?

32. 地震的里氏 (Richter) 震级公式为: $\log E_M = 12.24+1.44M$ 式中 E_M 是某次地震释放出的能量 (以尔格计)；M 是该次地震的震级。清康熙十八年七月廿八日 (公元 1679 年 9 月 2 日)，北京地区发生过一次八级地震 ($M = 8$) 。试问：

(1) 该次地震释放的能量是多少?

(2) 如果用此能量把重物从地面上举起，它能把多少质量的物体升高 1 公里?

32. 根据最新勘测资料，我国长江的长度居世界第三，它的主源头是青海高原昆仑山南麓的托托河，从这里经 5,000 米落差注入东海，它的水利资源的储藏量是 1.125×10^8 千瓦。据此计算长江的平均流量。

第七章

振　　动

7.1　弹　性　力

提到弹性力，我们自然会想到弹簧的作用。如图7.1，它表示一个弹簧，左端固定在壁上，右端与质量为 m 的物体连接在一起。当弹簧处在自然伸长状态时，m 并不受力，这个位置称为平衡位置；当把 m 拉离平衡位置时，m 受到弹簧的作用力。这个作用力的特点是，当把 m 移到 O 的右边，即 $x > 0$ 的位置时，弹簧力的方向是向负 x 的；而当把 m 移到 O 的左边，即 $x < 0$ 的位置时，弹簧力的方向是向正 x 的，且力的大小与位移大小成正比。这样，我们可以把弹簧的作用力写成

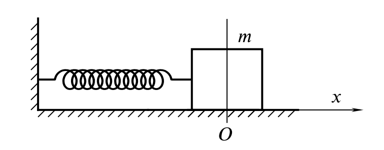


图 7.1　弹簧的力

$$F = -kx \tag{7.1.1}$$

式中 x 是 m 对平衡位置的位移，k 叫作弹性系数 (或倔强系数)，越大表示弹簧越硬。弹簧的力具有式(7.1.1)的性质，这一点也叫胡克定律。

由式(7.1.1)可知弹性力有两个特点：

(1) 因为弹性力 F 的指向总与位移 x 的方向相反，故弹性力 F 总是指向平衡位置，总是力图把质点拉回到平衡位置；

(2) 因为 F 的数值大小正比于位移 x 的大小，所以 m 偏离平

衡点越远，则它受到的拉回平衡点的力也越大。

因此，可以看到，在弹性力 F 作用下的质点，其基本的运动形式是在平衡点附近来回振荡，它是一种被“束缚”在平衡点附近的运动。

除了弹簧外，其他的力也可能具有(7.1.1)的形式。如图 7.2 所示的单摆，如将小球从平衡点 O 拉到 B 点再松手，小球将在平衡位置 O 点附近往复摆动。它的结构虽与上述振子 m 完全不同，但它们的运动性质是十分相似的。我们以角位移 θ 作为描写小球位置的变量，并规定小球在平衡位置右方时，θ 为正；在左方时，θ 为负。如果偏角 θ 很小，小球受到的重力与绳的张力的合力为

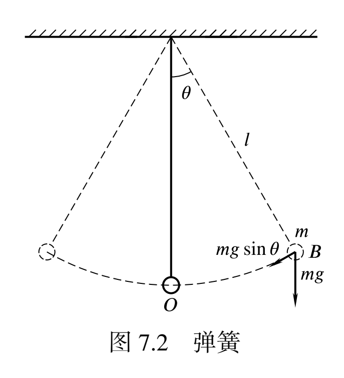


图 7.2　弹簧

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \tag{7.1.2}$$

式中负号表示 F 与角位移方向相反。当小球偏向右方，即 $\theta > 0$ 时，F 指向左方 ($F < 0$)；当偏向左方，即 $\theta < 0$ 时，F 指向右方 ($F > 0$)。亦即 F 永远指向平衡位置，且 F 大小与角位移的大小成正比。

可见，单摆所受的虽不是弹性力，但式(7.1.2)在形式上与式(7.1.1)完全相似。我们把这种与弹性力具有相似表达式的力，叫做准弹性力。

这类弹性力的实例，还可以举出许多。例如琴弦的颤动，树木的摇曳，分子的振动等，都是在准弹性力作用下的运动。一般质点在其稳定的平衡点附近的运动，大都是准弹性力作用下的运动。现在我们来证明这一点。

上章讨论一维运动的一般性质时已指出，所谓稳定的平衡点，即势能曲线中的极小点。例如图 7.3 表示的势能曲线，$x = x_0$ 即是一个稳定的平衡位置。能量为 $E = V_0$ 的质点可以在 $x = x_0$ 处于静止状态。如果给质点添加一点能量，它将在 x 附近来回振荡作束缚运动。按一般理论式(6.5.1)，这个运动所受的力为

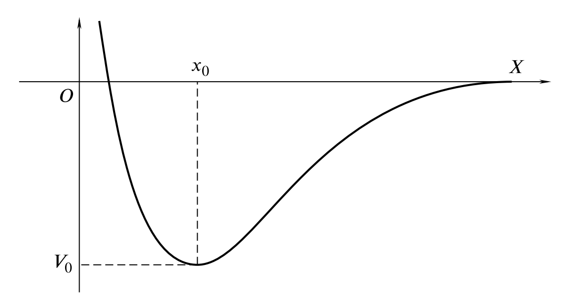


图 7.3　稳定的平衡状态

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \tag{7.1.3}$$

由于质点只在 x 附近运动，故可以把势能函数 $V(x)$ 在 x_0 点附近作泰勒展开

$$\begin{aligned} V(x) = V_0 &+ \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} (x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

因为 x 是 $V(x)$ 的极小点，故

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} = 0$$

所以，对于在 x_0 附近的运动，忽略式(7.1.4)中 $(x - x_0)^3$ 以后的项，势能函数可近似为

$$V(x)=V_0+\frac{k}{2}\left(x-x_0\right)^2 \tag{7.1.5}$$

其中
$$k=\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0} \tag{7.1.6}$$

它是个大于零的数。将式(7.1.5)代入式(7.1.3)，就得到

$$F=-k\left(x-x_0\right) \tag{7.1.7}$$

可见，只要把平衡位置 x_0 取为原点，它的形式与式(7.1.1)就完全一样了。这就证明了物体在其平衡位置所受到的力，都具有弹性力的性质。

弹性力〔式(7.1.1)〕的势能函数是

$$V=\frac{1}{2}kx^2 \tag{7.1.8}$$

实际上，取 $V_0=0$，$x_0=0$ 代入式(7.1.5)，即得到上式。

势能〔式(7.1.8)〕的曲线示于图7.4 中。由图可见，在一个严格的弹性力作用下的质点只可能作束缚运动，对任何大的能量 E，质点都不能作自由运动，而只能在下列有限范围内运动，即

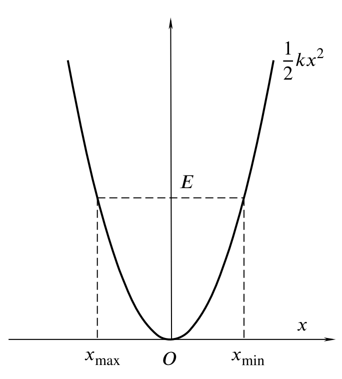


图 7.4　弹性力的势能函数

$$x_{\min}\leqslant x\leqslant x_{\max}$$

其中
$$x_{\min}=-\sqrt{\frac{2E}{k}}$$
$$x_{\max}=+\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

7.2　振　动　解

本节从动力学基本方程来求解在弹性力作用下的运动。现在

还是先讨论系在弹簧一端的质点 (图7.1)，它称为振子。按牛顿第二定律，振子的运动方程为：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{7.2.1}$$

由于 k，m 都是正数，所以可以定义一个实数 ω，使得

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{7.2.2}$$

于是，式(7.2.1)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \tag{7.2.3}$$

式(7.2.3)就是振子运动的微分方程。它的解是

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{7.2.4}$$

其中 A，φ_0 是两个任意常数。图7.5 画出了上式的 x-t 关系，它清楚地显示周期运动的特征。这种周期运动叫做简谐振动。

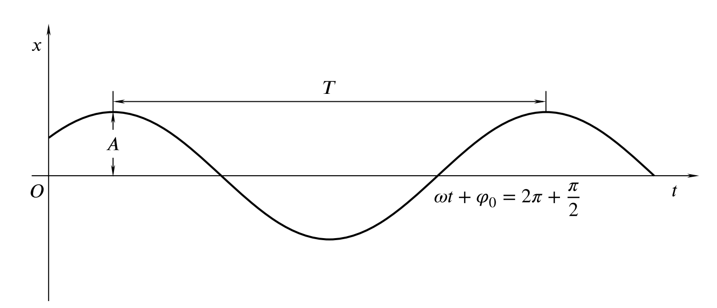


图 7.5　简谐振动

现在我们来说明式(7.2.4)中各量的物理意义。

首先，由三角函数性质 $|\cos\theta| \leqslant 1$ 可知，位移量 x 的绝对值不能大于 A，即

$$
\begin{aligned}
|x| &= \left|A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)\right| \\
&= A\left|\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)\right| \leqslant A
\end{aligned}
$$

这说明 A 是振子离开平衡位置的最大距离，称为振幅。上节中已指出，

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

所以

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

或者

$$E = \frac{k}{2}A^2 \tag{7.2.5}$$

即振幅的平方与振子的能量成正比。

其次，如果式(7.2.4)中的时间 t 增加一个数值 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，x 变成

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi_0\right] \\
&= A\cos\left(\omega t+2\pi+\varphi_0\right) \\
&= A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)
\end{aligned}
$$

也就是说，相隔 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的两个时刻，运动状态是相同的，即运动是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为间隔重复的。所以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 就是振动的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

又因 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$，故有

$$T = -\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{7.2.6}$$

可见，周期仅由振子的质量 m 和弹簧的弹性系数 k 来确定，而与振子的能量 E 无关，这是简谐振动的重要特征。振子在单位时间

内的振动次数，称为频率 ν，由下式给定：

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

所以

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

ω 称为圆频率，它和频率 ν 相差一个因子 2π。

再则，由式(7.2.4)可见，当振幅 A、圆频率 ω 一定时，位置只决定于 $(\omega t + \varphi_0)$，也就是说振动物体的运动状态可由 $(\omega t + \varphi_0)$ 来标志。$(\omega t + \varphi_0)$ 这个量叫做位相。知道了位相也就知道了物体的运动状态。例如，当位相为 $\frac{\pi}{2}$，或者 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$(其中 n 为整数) 时，就必有 $x = 0$。

常数 φ_0 是时间 $t = 0$ 时的位相，所以叫做初位相，它决定 $t = 0$ 时刻振子的位置 $x_0 = A\cos\varphi_0$。

对式(7.2.4)作 t 的微分，就得到振子速度的表达式

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{7.2.7}$$

可见，速度的周期变化也由三角函数描写。

对比式(7.2.4)与式(7.2.7)，可以看到，当 x 到达极大或极小值时，即 $x = \pm A$，则速度为零，$\upsilon = 0$；而当速度达到极大或极小值时，即 $\upsilon = \pm\omega A$，则位置为零，$x = 0$。其实这个性质很容易从势能曲线 (图 74) 得到。对于能量为 E 的振子，它的机械能守恒方程是

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

因此，当

$$x = \begin{cases} A \\ -A \end{cases} = \begin{cases} x_{\max} \\ x_{\min} \end{cases}$$

势能等于总能量，$E=V$，故动能为零，即速度为零。相反，当速度达到极值，即动能达到极大时，动能等于总能，势能为零，故 $x=0$。

7.3 简谐振动的几何表述

为了进一步理解简谐振动（式(7.2.4)）的特性，我们再来研究匀速圆周运动。如图7.6 表示一个以 r_0 为半径的圆周运动。若角速率为恒定的，则按1.9 节中的表示可知，质点的角位置 φ 与角速率 ω 的关系为：

$$\varphi=\omega t+\varphi_0 \tag{7.3.1}$$

式中 φ_0 是 $t=0$ 时刻的角位置。

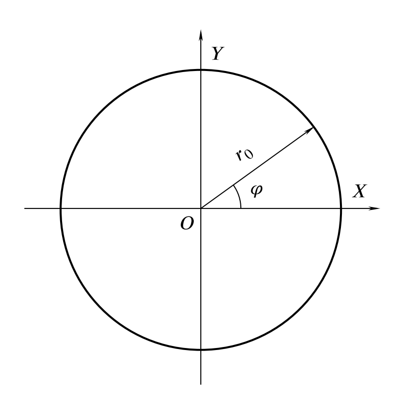


图 7.6 圆周运动与简谐振动

如果我们用 (x,y) 坐标来描写质点的位置则有

$$\begin{aligned} x&=r_0\cos\varphi \\ y&=r_0\sin\varphi \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

将式(7.3.1)代入式(7.3.2)，得到

$$x=r_0\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

$$y = r_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \tag{7.3.3}$$

对比式(7.3.3)及式(7.2.4),可见两者是完全相同的,只是式 (7.2.4)中的振幅 A 在式(7.3.3)中变成了 r_0。因此，结论是：匀速圆周运动质点的 x 坐标按简谐振动方式变化。

这个结果启发我们可以把每个简谐振动用一个匀速圆周运动来表述。如图7.7，如果简谐振动是沿着 X 轴的，那么我们可以用矢量 **OA** 来代表这个简谐振动。**OA** 的长度等于简谐振动的振幅，它以匀角速率 ω 绕 O 转动。**OA** 与 X 轴的夹角 φ，就是位相。矢量 **OA** 在 X 轴上的投影即为振子的位置坐标，这种表述简谐振动的方法称为几何表述。

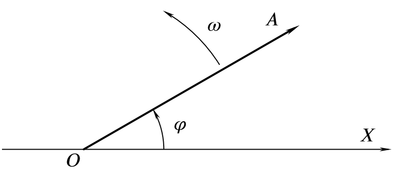


图 7.7　简谐振动的几何表述

7.4　阻尼振动和 Q 值

简谐振动只是一种理想情况。因为我们在简谐振动中假定，物体只受到弹性力 (一种保守力) 的作用，总机械能是保持不变的。但在实际情况下，除去弹性力外，物体总还要受到阻力，例如摩擦力的影响。在单摆摆动时，会受到空气的阻力。因而，实际情况往往不是理想的简谐振动，振动物体的能量往往都会由于阻力作用而不断减少。由于振动的能量和振幅平方成正比，所以能量随时间减少时，振幅也就随时间衰减。

能量或振幅随时间衰减的振动过程称为阻尼振动。

图7.8给出了在阻尼振动过程中，位置 x 和时间 t 的典型关系。在阻尼振动过程中，振幅由大变小，最后成为零，即振动停止。

为了描写阻力的影响，我们需要引进新的物理量。

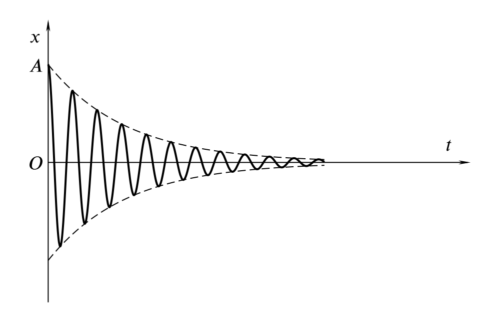


图 7.8　阻尼振动

由于阻力的存在，质点每完成一周期的振动，它的总能量 E 中就有一部分消耗于克服阻力，用 $(\Delta E)_T$ 表示示这个值。显然，如果每周期消耗的能量 $(\Delta E)_T$ 在总能量 E 中占的份额越小，则表示阻力越小，因而振动衰减越慢，越接近于理想简谐振动。这使我们看到，可以用总能量 E 与耗损能量 $(\Delta E)_T$ 之比值 $\dfrac{E}{(\Delta E)_T}$ 来作为能量衰减的度量通常，我们把比值 $\dfrac{E}{(\Delta E)_T}$ 的 2π 倍定义为振动系统的 Q 值，也叫做品质因数，即

$$Q = 2\pi\frac{E}{(\Delta E)_T} \tag{7.4.1}$$

可见，Q 是无量纲的量。Q 越大，表示系统的阻尼损耗越小，衰减越慢。当 $Q = \infty$ 时，就是理想的简谐振动情况

在阻尼振动过程中，E 是随时间变化的，$(\Delta E)_T$ 一般也随时间变化，故由定义（式7.4.1），Q 可能是随时间变化的量。但是，实际上有些阻尼振动过程一周期所“支出”的能量 $(\Delta E)_T$ 与“库存”的总能量 E 成正比，E 越大，$(\Delta E)_T$ 也越大。在这种情况下，Q 值与时间无关，是个常数。

现在我们讨论 Q 为常数的阻尼振动的特征。我们知道，能量对时间的微商 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 代表单位时间内能量的增量。对于阻尼振动，

必定有 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t < 0$，所以在一周期中能量的减少 $(\Delta E)_T$ 应当是

$$(\Delta E)_T = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}T$$

将上式代入式(7.4.1)中，整理后得

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{E}{Q}$$

又因 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，故有

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega E}{Q} \tag{7.4.2}$$

式(7.4.2)是振动能量 E 的微分方程。如果 Q 是常数，很容易得到上式的解为

$$E = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{Q}t} \tag{7.4.3}$$

式中 E_0 是初始能量。可见，当 Q 为常数时，阻尼振动能量随时间作指数衰减，Q 越大，衰减越慢。Q 值的确描写了能量衰减的快慢。

现在我们研究一个 Q 为常数的实例。前面已经提到，单摆运动要受到空气的阻力，阻力方向与质点速度方向相反，阻力大小与速度值成正比。所以，空气阻力可以表示成

$$F_{\text{阻}} = -\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{7.4.4}$$

其中系数 η 标志阻力的大小。在水或其他液体中运动的物体所受的阻力，也具有上述的形式。

阻力（式(7.4.4)）对质点作功，其功率由式(6.2.7)得

$$P = F_{\text{阻}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\eta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{7.4.5}$$

这个功率就应当等于质点能量的减少率。

注意到式(7.2.7)，上式可以写成

$$P = -\eta\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

在一个周期的时间里，阻力作功的数值等于

$$\begin{aligned}\Delta A &= \int_0^T P\,\mathrm{d}t \\ &= -\eta\omega^2 A^2 \int_0^T \sin^2\left(\omega t+\varphi_0\right)\mathrm{d}t \\ &= -\pi\eta\omega A^2\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

$-\Delta A$ 就是在一个周期的时间里，振子损失的能量。即

$$(\Delta E)_T = -\Delta A$$

再注意到式(7.2.5)，则由式(7.4.6)可推得

$$Q = \frac{2\pi E}{(\Delta E)_T} = \frac{k}{\eta\omega} = \frac{\sqrt{km}}{\eta} \tag{7.4.7}$$

最后一步利用 $\omega^2 = k/m$。因 m 及 η 都是常数，所以现在品质因数 Q 也是一个常数。

在有阻力〔式(7.4.4)〕的情况下，振子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\eta}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$，$\beta = \dfrac{\eta}{2m}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7.4.8}$$

这就是阻尼振的基本方程。当 $\beta < \omega_0$ 时，它的解为

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \tag{7.4.9}$$

其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$，式(7.4.9)是阻尼振动的振动解，与理想的简谐振动相比较，它只多了一个因子 $\mathrm{e}^{-\beta t}$，这表示振幅是以指数形式域的。式(7.4.9)的 x-t 曲线，即有图 78 的形式。另外应注意到，

阻力不仅对振幅有影响，而且也影响到周期。当 $\beta=0$ 时，振动周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$；$\beta\neq 0$ 有阻力时，周期变为 $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ 即阻力的存在使周期变长。若阻力很大 $\beta\to\omega_0$，则周期 $T\to\infty$。这就是说，如果阻力太大，质点的周期振动将消失。因此，为了消除一些不必要的振动，可以采用增加阻力的办法。

7.5 共　　振

在有阻力的情况下，振子的振动是衰减的，因此，为了使阻尼振子作不衰减的振动，必须时时给它补充能量。补充能量的一种方式就是用外力作用到振子上，这时发生的运动，称为受迫振动。扬声器中纸盆的振动，各种弦乐器中音腔薄木板随着琴弦的振动，缝纫机中针的振动，蒸汽机活塞的振动等等，都属这类振动。

在周期性外力作用下的振子，会产生一种特殊的效应，即所谓共振。这是说，如果外力是周期性的，受迫振动有一类很特别的现象，即共振。虽然周期性外力并不很大，但它所造成的振动的振幅却特别大。

共振具有很重要的实用价值。无论在电学，光学等其他物理学各部门中，或是在工程技术部门中，共振现象都是常遇到的。下面我们来发展这一现象的理论。

受迫振动的物体受到三种力，即弹性力 $(-kx)$、阻力 $\left(-\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$ 和周期性外力 $\left(F_0\cos\omega t\right)$。所以，按照牛顿第二定律，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_0\cos\omega t$$

或
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\eta}{m}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$
引入符号 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$，$2\beta=\frac{\eta}{m}$，$f_0=\frac{F_0}{m}$，则得
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{7.5.1}$$
这就是在周期性外力作用下，振子运动的基本方程。求它的一般解比较繁，我们可以从物理角度判断一下运动的大致情况。如果振动系统开始是静止的，则加上周期性外力后，应有很小的振动，并渐渐加大，大到一定程度后，阻力的作用也增加，结果当阻力所消耗的能量与外力所给予的能量相等时，振动就稳定下来。因此，我们可以尝试一下去寻找稳定解，即具有下列形式的解：
$$x=A\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \tag{7.5.2}$$
将式(7.5.2)代入式(7.5.1)，可以定出 A，ω'，φ_0 的值为
$$A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}} \tag{7.5.3}$$
$$\varphi_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{7.5.4}$$
$$\omega'=\omega \tag{7.5.5}$$
这就是稳定的受迫运动解。它描写了一个简谐振动，它的频率等于周期性外力的频率。

解式(7.5.2)的一个最重要的特点是振幅 A 和外力的频率有关，而且，当 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时，式(7.5.3)的分母达到极小，故 A 达到极大，这个 ω 称为共振频率。这就是说，当外力频率为共振频率时，将引起最大的响应。由于 β 一般很小，所以可近似地说，当 $\omega\approx\omega_0$ 时达到共振。

图7.9 给出了 A 作为 ω 的函数的曲线。这里所有曲线都有一个峰，这就是共振。可以明显看到，如果振动系统的阻力越小，

即品质因数 Q 越大，则曲线的振幅峰越明显。也就是说,系统的 Q 值越大,则其共振现象越显著。

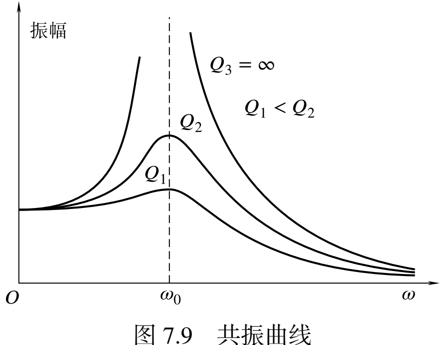


图 7.9　共振曲线

在极端情况，若阻力为零，即 $\beta = 0$ 时，则 $A = \dfrac{f_0}{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|}$。这时共振发生于 $\omega = \omega_0$，而且振幅无限大。而在 $\omega \neq \omega_0$ 时，A 具有有限值。

我们再从能量观点来分析一下受迫振动。在稳定振动时，质点的振动振幅不变，也就是它的总机械能是不变的。但是，阻力的存在随时消耗着振子的机械能。这说明周期性外力一定是在不断地对谐振子作功，补偿了阻力的消耗。

既然外力供给振子的能量等于阻力消耗的能量，所以只要我们计算出了后者，也就得到了前者。由式(7.4.5)，阻力的功率为 $\eta\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$，所以，平均每单位时间阻力所消耗的振子的能量为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\int_0^T \eta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t\\ =&\frac{\eta f_0^2\omega^2}{2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

上式中 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 的是振动周期。这种计算是把瞬时功率在一个周期中进行平均。

式(7.5.6)就是平均每单位时间振子从外力吸取的能量，即平均吸收功率。它表明，只当外力的频率 ω 接近谐振子的固有频率 ω_0 时，振子才能有效地吸收外力所提供的能量，而对其他频率的外力所提供的能量，振子是很少吸收的。这种吸收具有选择性，称

为共振吸收。

如果阻力 β 很小，$\omega \approx \omega_0$ 发生共振，由式(7.5.6)给出共振时的吸收功率为

$$\frac{\eta f_0^2}{8\beta^2} = \frac{m f_0^2}{4\beta}$$

这里使用了 $\beta = \eta/2m$。当外力频率稍偏离 ω_0 时，吸收功率下降。现在来求：吸收功率为上述极大值的一半时，外力频率 ω 与振子的固有频率 ω_0 差多少。即解方程

$$\frac{\eta f_0^2}{16\beta^2} = \frac{\eta f_0^2 \omega^2}{2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}$$

采用 $\omega \approx \omega_0$，则

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) &= \left(\omega_0 + \omega\right)\left(\omega_0 - \omega\right) \\ &\approx 2\omega_0\left(\omega_0 - \omega\right)\end{aligned}$$

上式成为

$$\frac{f_0^2}{16\beta^2} = \frac{f_0^2}{2\left[4\left(\omega_0 - \omega)^2\right)^2 + 4\beta^2\right]}$$

解得

$$\left|\omega_0 - \omega\right| \approx \beta$$

所以，只要外力的频率在下列范围

$$\omega_0 - \beta < \omega < \omega_0 + \beta \tag{7.5.7}$$

吸收功率就不小于最大吸收功率的一半，即吸收较强。所以式(7.5.7)是发生其振吸收的频带宽度，简称吸收带宽，或带宽。从式(7.5.6)可知，阻力越小，振子的带宽就越窄，共振特征越明显。

7.6 简谐振动的合成

简谐振动只是振动或周期运动中的一种，许多实际的周期运

动并不是简谐的。例如，各种乐器的振动大都不是简谐振动。所谓音色，就是决定于振动的形式。譬如，小提琴的振动有如图 7.10 所示的锯齿形。各种乐器都有自己的独特振动形式。

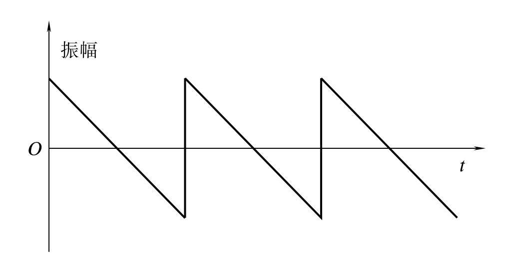


图 7.10　小提琴的振动

这种情况，似乎要求我们把振动按其形式分为多种类型来建立理论。其实不然，因为各种周期振动都可以由简谐振动组成。理论上可以证明：任意一个周期振动 $x = f(t)$，即 $f(t)$ 是 t 的周期函数，以 T 为周期，即

$$f(t + nT) = f(t) \tag{7.6.1}$$

其中 n 为任意正、负整数，则 $f(t)$ 可以表示成

$$\begin{aligned} f(t) =& A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) \\ &+ A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \cdots \end{aligned} \tag{7.6.2}$$

其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$；$A_0, A_1, A_2, \ldots$ 决定于 $f(t)$ 的具体形式。式(7.6.1) 及式(7.6.2)表示，任何一个周期为 T 的振动，可以看成是由周期为 $T, \dfrac{1}{2}T, \dfrac{1}{3}T, \ldots$ 一系列简谐振动相加而成的。例如上述小提琴的振动可写为

$$x = A\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

所谓音色，就决定于 $A_1, A_2, \ldots$ 各项简谐振动的振幅之比例。声音是否和谐，也就决定于这些比例。小提琴的一系列振幅的比是

$\frac{1}{1}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\cdots$ 非常简单而有规律，这就是小提琴声音优美动听的物理原因。

现在讨论几种简单的振动合成问题。

(1) 一种最简单的情况是

$$x=A_1\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)+A_2\cos\left(\omega t+\varphi_2\right) \tag{7.6.3}$$

这表示质点的运动是两种简谐振动合成的结果，而且这两种简谐振动具有相同的周期。

利用三角公式，可以将上式改写成

$$\begin{aligned}x=&\left(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2\right)\cos\omega t\\&-\left(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2\right)\sin\omega t\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

令

$$\begin{aligned}A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2&=A\cos\varphi\\A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2&=A\sin\varphi\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

则式(7.6.4)成为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{7.6.6}$$

由式7.6.5，A 及 φ 可以表示成

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\\\operatorname{tg}\varphi&=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{aligned} \tag{7.6.7}$$

式(7.6.6)表示，两个相同周期 (或频率) 的简谐振动合成的结果仍是一个简谐振动，并具有相同周期，只是振幅和位相应取式(7.6.7)给出的值。

式(7.6.7)也很容易由几何方法得到。按7.3节的方法，每个简谐振动可用一矢量表示，则

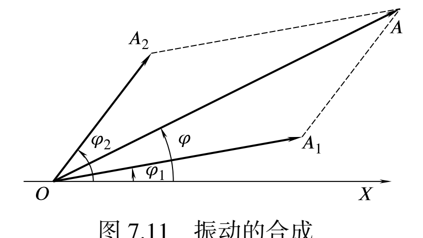


图 7.11 振动的合成

式(7.6.3)应由图7.11中的矢量 $\mathbf{OA_1}$ 及 $\mathbf{OA_2}$ 表示。由于 $\mathbf{OA_1}, \mathbf{OA_2}$ 绕 O 转动的角速度 (即 ω) 相同，所以二者相对位相不变，因此二者在 OX 方向的投影之和，就等于矢量 $\mathbf{OA}$ 的投影。$\mathbf{OA}$ 为 $\mathbf{OA_1}$ 及 $\mathbf{OA_2}$ 的矢量和。由 $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ 可求出 A 及 φ，结果仍然是式(7.6.7)。

(2) 两个振幅相同，但周期差别很小的简谐振动的合成，即

$$x = A\cos\left(\omega_1 t + \varphi\right) + A\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) \tag{7.6.8}$$

其中 ω_1 与 ω_2 的差很小。

$$\left|\omega_1 - \omega_2\right| \ll \omega_1, \omega_2$$

利用三角公式，式(7.6.8)可以改写成

$$\begin{aligned} x &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 t}{2}t + \varphi\right) \\ &\approx 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\omega_1 t + \varphi\right) \end{aligned}$$

这个公式的物理意义是，质点仍作频率为 ω_1 的简谐振动，但它的振幅不是常数，而是 $\left|2A\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|$，即振幅也是随时间周期变化的。振幅的平方正比于振动能量，所以，这种振动具有周期生的强弱变化，这种现象称为拍。振幅的变化周期即为拍的周期。由于振幅只涉及 $\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ 的绝对值，所以，单位时间中的振福变化次数等于的 $\dfrac{1}{2\pi} - \dfrac{\left|\omega_1 - \omega_2\right|}{2}$ 两倍，故拍的周期为

$$T_{\text{拍}} = \frac{2\pi}{\left|\omega_1 - \omega_2\right|}$$

(3) 二维的振动合成。由7.3节的讨论已知，一个匀速圆周运力可以看成在 X，Y 两个方向上的简谐振动的合成，即匀速圆周运动可表示为

$$\begin{cases} x = r_0\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \\ y = r_0\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \end{cases} \tag{7.6.9}$$

其中 r_0 为圆周的半径。

现在我们把式(7.6.9)加以推广。假定 x 方向与 y 方向振动的位相不一定相同，即

$$\begin{cases} x = r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \\ y = r_0 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right) \end{cases} \tag{7.6.10}$$

这时，运动的形态完全取决于 φ_1，φ_2 的相互关系。

如果 $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$，则式(7.6.10)变为式(7.6.9)，它是匀速圆周运动。

如果 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ，则式(7.6.10)成为

$$\begin{aligned} x &= r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \\ y &= r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \end{aligned}$$

因此，这时的轨迹是一段直线：

$$x = y \quad |x|, |y| \leqslant r_0$$

如果定义坐标

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

则

$$r = \sqrt{2} r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right)$$

故质点是沿着图 712(a) 的斜线方向作简谐振动。

为了讨论一般情况，我们可以从式(7.6.10)得出

$$\begin{aligned} x + y &= r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) + r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right) \\ &= A_+ \cos\left(\omega t + \varphi\right) \\ x - y &= r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_1\right) - r_0 \cos\left(\omega t + \varphi_2\right) \\ &= A_- \sin\left(\omega t + \varphi\right) \end{aligned} \tag{7.6.11}$$

其中

$$\begin{aligned} A_+ &= \sqrt{2} r_0 \sqrt{1 + \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} \\ A_- &= \sqrt{2} r_0 \sqrt{1 - \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2} \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

由式(7.6.11)即得

$$\frac{(x+y)^2}{A_+^2}+\frac{(x-y)^2}{A_-^2}=1$$

可见，式(7.6.10)表示的运动轨迹，一般情况是一个椭圆。椭圆的长轴或短轴沿着 ±45° 线，两轴长分别为 A_+ 及 A_-。由此，不难从位相差 $\varphi_2-\varphi_1$ 给出一系列不同的运动形态 (图7.12)。

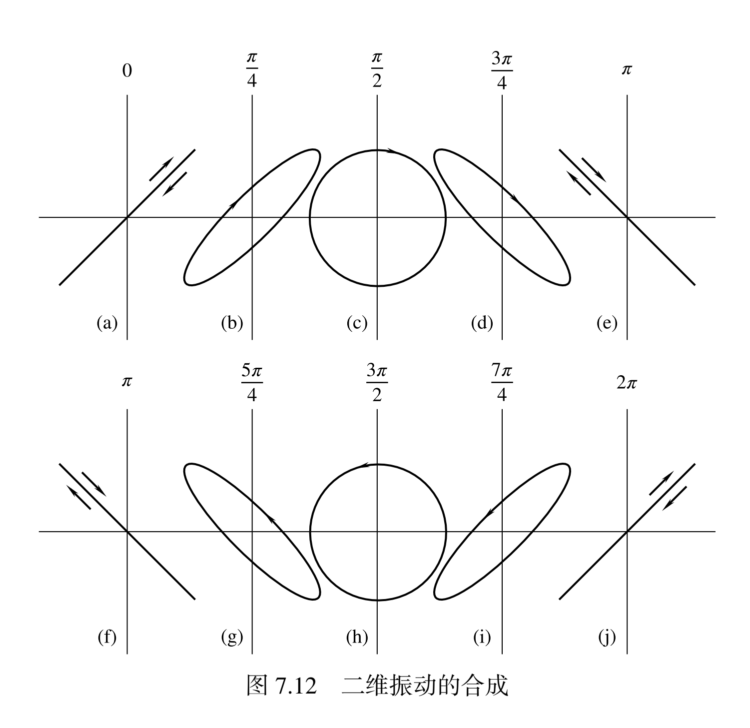


图 7.12　二维振动的合成

思　考　题

1. 一弹簧自然长度为 l_0，倔强系数为 k，将弹簧竖挂，下端垂以重物 m，重物将弹簧在弹性限度内拉长到一个新的平衡长度

l_0。试问：对于这个新的平衡位置的位移，此弹簧是否具有同样的倔强系数？

2. 在图7.13 所示的诸情况中，哪些是简谐振动？哪些不是简谐振动？试说明理由。

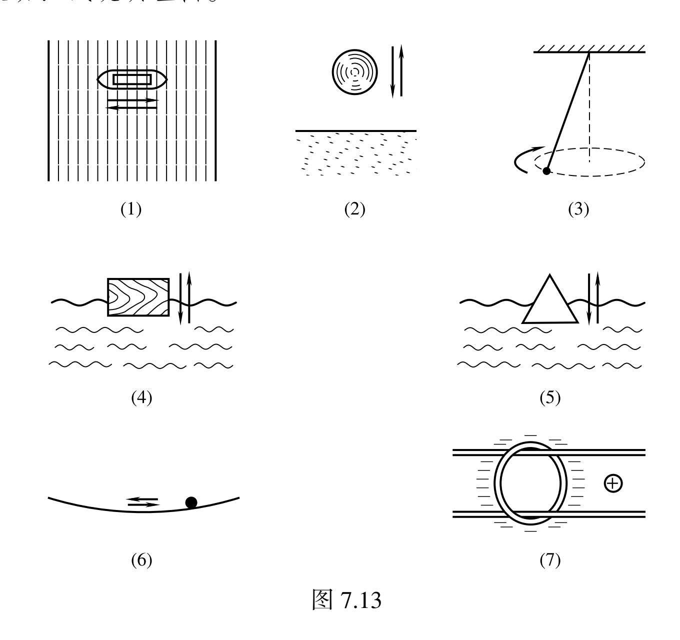


图 7.13

(1) 织布机的梭子置于光滑水平经线上，在两边冲力作用下作往返运动；

(2) 小球在光滑水平面上作完全弹性的上下跳动；

(3) 不可伸长的细线悬一小球在水平面上作匀速圆周运动；

(4) 一均匀矩形木块浮在水上，用力将它部分按入水中，然后松手，木块作上下浮动，不计水的粘滞阻力；

(5) 在 (4) 中，换了一个密度小于水的均匀正三棱锥，锥顶向上，在水中上下浮动且幅度较大；

(6) 小球在半径很大的较光滑凹球面底部作短距离的往返滚

动时，球心的运动；

(7) 一个带负电荷的圆环套在水平的光滑薄玻璃管上，玻璃管内有一带正电荷的小球，在静电力的作用下作往返运动，假定生运动过程中小球和圆环上的电荷分布都不变。

3. 一个倔强系数为 k 的弹簧和一质量为 m 的物体组成一振动系统。若弹簧的质量不计，弹簧的自然长度为 l_0，在下述各情况下，振动周期及平衡时弹簧的长度有何不同?

(1) 整个系统放在光滑水平面上，一端固定；

(2) 整个系统竖直挂起；

(3) 整个系统放在倾角为 α，光滑斜面上，上端固定。

4. 两个倔强系数都为 k 的轻弹簧与一重物 m 组成以下各种振力系统，试问：哪些是简谐振动？如是，则求其周期 (图7.14)。

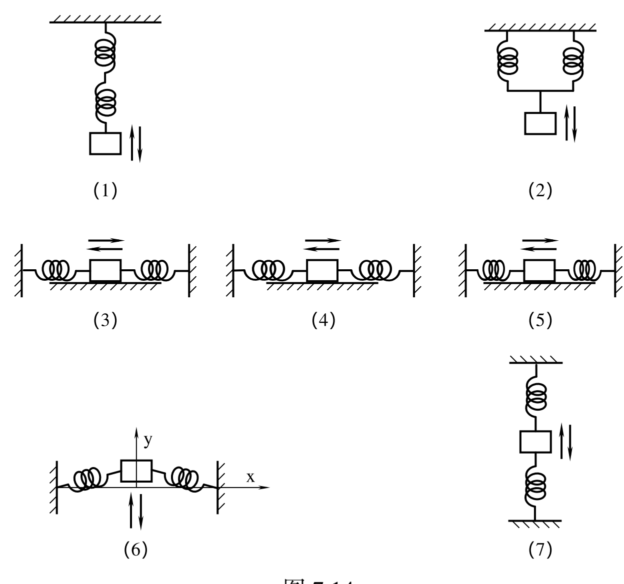


图 7.14

(1) 串联后，吊起 m；

(2) 开联后，吊起 m；

(3) m 与两弹簧都平放于光滑水平面上，平衡时弹簧处于自然状态，m 振动方向与弹簧伸长方向相同；

(4) 如 (3) 放置，但在平衡位置时每个弹簧伸长了 x_0；

(5) 如 (3) 放置，但在平衡位置时每个弹簧压缩了 x_0；

(6) k 与 m 放于水平光滑桌面上，m 在 y 方向振动，振动时保持两个弹簧长度相等，平衡时两弹簧自然伸长；

(7) 系统竖挂，m 在平衡位置时，上面弹簧的伸长量等于下面弹簧的缩短量。

5. 秋千的摆动幅度由大到小时，它的频率会发生什么变化？

6. 单摆的振幅不是很小时，试证明周期的一般表达式是

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right)$$

式中 θ_m 是最大角位移。

7. 如果将单摆、质点-弹簧系统放到月球上去，它们的振动频率改变吗？在宇宙飞船上用什么方法测质量？

8. 一个无质量、长 l_0、倔强系数为 k 的弹簧竖直挂在天花板上，现将一质量为 m 的质点挂于弹簧之下。若已知 $mg = k\Delta l$，是否有 $mg\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$？为什么？引力作的功是否等于弹簧弹性势能的增加量？引力的存在是否会改变这个系统的振动频率、平衡位置及总能量？

9. 一质点受指向原点的力 $F = -6x^3$ 的作用。试问：这质点是否作周期运动？这运动是否是简谐振动？

习　　题

1. 一轻弹簧垂直悬挂，下端挂上一个质量 m_1 为 2.0 千克的物体，然后再挂上一个质量 m_2 为 300 克的物体，测得弹簧又拉长了 2.0 厘米。如将 m_2 取下，而使 m_1 振动，求振动周期 T。

2. 用等长的两根不可伸长的细线挂在同一悬点的两个小球，质量分别为 m 和 $2m$，将它们分别向左右拉开一个不太大的角位移 θ_1 和 θ_2，同时由静止自由摆下。试问：它们将在什么地方相碰？

3. 比较 $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \pi/2)$ 与 $x_2 = -A_2 \sin \omega t$ 之间的位相关系。

4. 将单摆从平衡位置拉开一个很小的角度 φ，然后放手任其摆动，并开始计时。试问：此 φ 角是否就是单摆作简谐振动的初位相？如果不是，那么单摆作简谐振动的初位相 φ_0 是多少？

5. 某一质点按下列规律运动：

$$y = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t$$

其中 A，B，都是常数。试问：

(1) 速度、加速度、将遵守什么规律？

(2) 是简谐运动吗？

6.(1) 试证：任一简谐运动的周期和频率的公式是

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{\ddot{x}}}, \quad \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\ddot{x}}{x}}$$

(2) 试证：任一角简谐运动的周期和频率的公式是

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{\theta}{\ddot{\theta}}}, \quad \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\ddot{\theta}}{\theta}}$$

7. 把一质量为 m 的物体挂在吊着的轻弹簧下端，静止后弹簧伸长了 l，随后让此系统自由振动。试证：这系统的振动周期与一长为 l 的单摆的周期相同。

8. 把一重物挂在吊着的轻弹簧下端，静止后弹簧伸长 $l = 10$ 厘米；再把重物往下拉一段距离 $d = 2.0$ 厘米，并在位移方向给它一个初速度 $v_0 = 10$ 厘米/秒，然后放手任其自由振动。不计空气阻力，试求：

(1) 振动频率 ν；

(2) 振幅 A；

(3) 初位相 φ_0；

(4) 振动的数学表达式。

9. 如图7.15，摆长 $l = 150$ 厘米，在顶点 K 的正下方距 K 为 $d = 54$ 厘米处有一钉子 A，求这摆的周期 T。

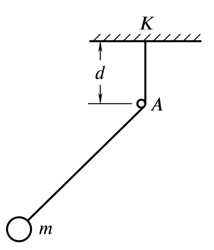


图 7.15

10. 一物体作简谐振动，在什么时候动能与位能相等？

11. 质量为 $m = 121$ 克的水银装在 U 形管中，管的横截面积为 $S = 0.3$ 厘米^2，水银的密度 $\rho = 13.6$ 克/ 厘米^3，向 U 形管的一端吹气，使另一端的水银面升高，然后让水银在管内自由振动。求振动的周期 T。

12. 将一质量 m 系于竖直悬挂的弹簧的下端，弹簧的端点以 2.0 秒的周期振动。将这个质量再增加 2.0 千克，周期就变为 3.0 秒。试求 m。

13. 一物体放在一活塞上，活塞在竖直方向作简谐运动，其周期为 1 秒。问：

(1) 在多大振幅时，物体与活塞将相互分离？

(2) 如果活塞具有 5.0 厘米的振幅，物体与活塞保持接触的最大频率为多大？

14. 一物体放在一水平面上，水平面以 2 赫兹的频率作水平简谐运动。物体和平面之间的静摩擦系数为 0.50。试问：如果物体不沿着水平面滑动，它的最大振幅是多少？

15. 两质点沿着同一直线作相同频率和相同振幅的简谐运动。

若它们每次沿相反方向相互通过时，它们的位移均为各自振幅的一半，试问：它们的相差是多少？

16. 将一倔强系数 $k = 7.0$ 牛顿/米、无质量的弹簧切成相等的两段，试问：

(1) 每一段的倔强系数是多少？

(2) 将这两段并联吊着一个质量为 M 的重物，若这个振动系统的自由振动频率为 3.0 赫兹，M 是多少？

17. 一均匀无质量的弹簧，它的长为 l，倔强系数为 k_0 将这弹 l 簧切成自然长度为 l_1 及 l_2 的两段，且 $l_1 = nl_2$(n 为一个整数)。试用 n，k 表示相应的倔强系数 k_1，k_2。

18. 如图7.16 所示，将 m 连接在两个弹簧 k_1，k_2 之间。试问：这系统的振动频率 μ 是什么？(不计摩擦及弹簧的质量。)

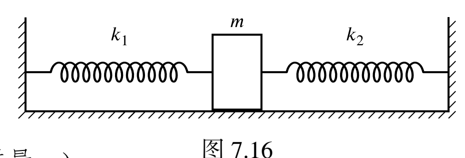


图 7.16

19. 一不计质量、自然长度为 l 的弹簧，两端分别系上质量为 m_1 和 m_2 的小物体，并放在光滑的水平桌面上 (图7.17)。手持 m_1 和 m_2 把弹簧拉长为 l'，停止不动，然后放手。求这系统的运动。

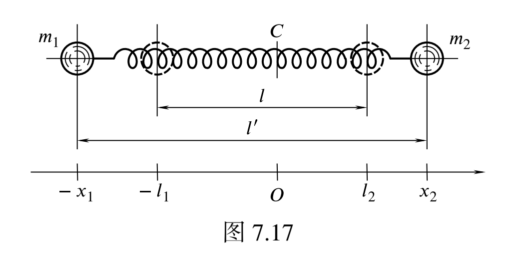


图 7.17

20. 弹簧及两物体连接如图7.18 所示。将 m_1 拿在手上，m_2 自由下垂，垂，待静止后放手。求物体的运动。

21. 一摆由很轻的棒和固定在它两端的相同的重物 m 做成一个重物到转轴 C 的距离 $l_1 = 30$ 厘米，另一个 $l_2 = 15$ 厘米 (图7.19)

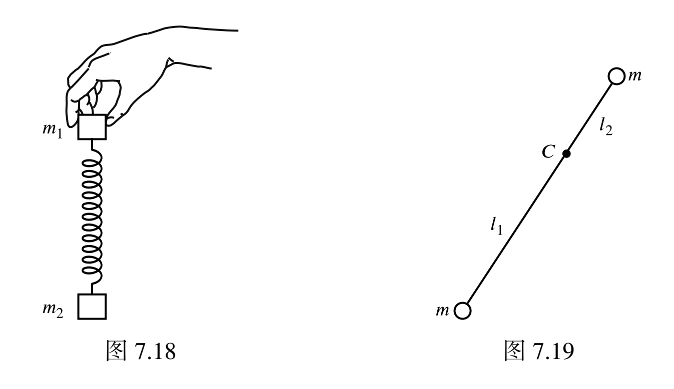


图 7.18　　　　图 7.19

试求：

(1) 它作微小振动时的周期 T；

(2) 它的折合摆长 l_0，即把它看成一个单摆时的等效摆长。

22. 若沿地球直径凿一条隧道,并设地球密度 $\rho = 5.5$ 克/ 厘米^3 的均匀球体。试证：

(1) 当无阻力时，一物体落入此隧道后将作简谐运动；

(2) 由地球表面落至地心的时间为

$$t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 21 \text{ 分}$$

式中 G 是引力常数。

23. 火车在铁轨上行驶，每经过接轨处即受一震动，使车厢在弹簧上面上下振动。设每段铁轨长 12.5 米，弹簧平均负重 5.5 吨，而弹簧每受 1 吨力将压缩 16 毫米。试问：火车速度多大时，振动特别强?

24. 有一音叉，在 440 赫兹时发声，声平计指出，声音强度在 4.0 秒之内减小到 1/5。试求音叉的 Q 值。

25. 将一根橡皮带悬挂起来，测得它的振动周期为 1.2 秒，3 个周期后，振幅减小到 1/2。试估计这个系统的 Q 值。

第八章

动 量 守 恒

8.1 动 量 守 恒

迄今为止，我们大都讨论单个质点的运动。在这一章里，我们要讨论由许多质点构成的体系的运动规律。这种问题，常称为质点系问题，或多体问题。例如，由所有行星和太阳构成的太阳系就是一个典型的质点系。一般在质点系中，每个质点都要受到其他质点的作用，同时，也受到体系之外的物体的作用。地球不但要受到太阳的万有引力作用，而且与其他所有行星都有万有引力作用。显然，在质点系中，每个质点的运动一般是相当复杂的。

在质点系中有一类是特别的，即所有质点都没有受到体系之外的物体的作用力。也可以简单地说，整个体系不与外物相互作用，这种质点体系称为孤立体系。在现实世界中，当然没有严格的孤立体系，但是近似的孤立体系很多。所谓近似的，是指体系内部的相互作用远大于外物对体系的作用，即每个质点所受内力远大于它所受的外力。譬如太阳系，除了太阳与行星、行星与行星之间的引力之外，当然也受到其他恒星的作用，但是这种力比较小，所以太阳系就是一个近似的孤立体系。又如一个大分子，它是由许多原子组成，原子之间的相互作用远大于其他分子的作用，这样，我们也可以把这个大分子看作近似的孤立体系。再如，在加速器的实验中，高能粒子束打到靶上，发生各种反应，我们称

之为碰撞。看起来这个系统非常复杂，但由于碰撞时作用很强，我们可以把一个高能粒子与它所撞上的一个粒子作为孤立体系来处理，其他作用全可不顾及。

孤立体系有些共同的动力学规律，其中之一就是总动量守恒。

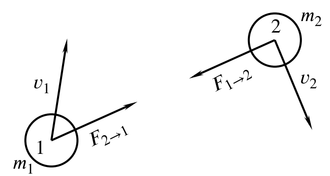


图 8.1 二质点体系

我们首先讨论一个最简单的质点系，它只包括两个质点 1 及 2(图 81)。如果它是孤立体系，那么，作用在质点 1 上的力，只有 2 对它的作用力 $\mathbf{F}_{2\to1}$ 而作用在质点 2 上的力，只有 1 对它的作用力 $\mathbf{F}_{1\to2}$。故根据牛顿第二定律，有

$$\begin{aligned} m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F}_{2\to1} \\ m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{F}_{1\to2} \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

上述两方程就是体系的动力学基本方程。再根据牛顿第三定律

$$\mathbf{F}_{1\to2} = -\mathbf{F}_{2\to1}$$

即可由式 ((8.1.1)) 推得

$$m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

它可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2\right) = 0 \tag{8.1.2}$$

我们定义

$$\mathbf{P} \equiv m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{8.1.3}$$

所以，式(8.1.2)成为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.1.4}$$

最终得到

$$\mathbf{P} = \text{不变量} \tag{8.1.5}$$

此式表明，对于两个质点构成的孤立体系，我们找到了一个新的不变量 **P**，称它为动量。在证明过程中，我们并没有用到作用力的具体形式，只用了牛顿第二、三定律，所以，这个守恒律是非常普遍的，即与作用力的具体形式无关，无论力是保守的或非保守的都适用。

对于多个质点所构成的孤立体系，可以用完全类似的方法证明体系的总动量不随时间变化，即

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n \\ &= \text{不变量}\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.1.7}$$

这就是动量守恒定律。

对于单个质点，我们也可以定义它的动量为 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$，那么，动量守恒（式(8.1.6)）可以表述为

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = \text{不变量} \tag{8.1.8}$$

其中 $\mathbf{P}_i$ 是第 i 个质点的动量。上式表示，在孤立体系中，每个质点的动量时刻在变化着，但它们的总和不变。

当体系与外界有相互作用，即非孤立状态时，动量守恒一般不成立，但当外力总合为零时，式(8.1.8)仍然成立。

迄今我们已经研究过两条守恒定律了，即能量守恒定律与动量守恒定律。下面我们比较一下这两条守恒定律的特点。

(1) 动量是矢量，动量守恒（式(8.1.8)）是一个矢量关系式，即实际上包括三个不变量：

$$P_x = \text{不变量}$$

$$P_y = \text{不变量}$$

$$P_z = \text{不变量} \tag{8.1.9}$$

而能量是标量，能量守恒只给出一个不变量。

(2) 动量守恒定律与机械能守恒定律是相互独立的。因此，对一个具体的物理过程而言，机械能守恒定律的成立，并不决定动量守恒定律成立反过来，动量守恒定律的成立，也不决定机械能守恒定律成立。譬如，我们可以找到许多能量守恒成立而动量守恒不成立的例子。对于行星沿圆轨道绕太阳的运动，若把行星作为一个体系，它的能量是守恒的，但是动量并不守恒，因为速度方向时刻变化着。反过来，动量守恒成立而机械能守恒不成立的例子也很多如果体系中的质点之间有摩擦力存在，则机械能守恒定律不成立，但动量守恒定律是成立的。这些例子都表明，两条守恒定律是不能互相代替的。能量、动量与位置、速度、质量、加速度等一样，是有不可替代作用的动力学量。

(3) 在证明动量守恒定律时，我们用到了牛顿第三定律。第三章中我们已经指出，牛顿第三定律是关于力的性质的一个定律；并且也已指明，第三定律并非总是适用的。因此，只有在第三定律适用的地方，才可以应用动量守恒定律。反之，我们也能从动量守恒的成立，证明第三定律的正确，它们互为因果。在经典力学中，它们二者是等价的。

总之，在经典力学中，机械能守恒适用于保守力的情况，而动量守恒适用于牛顿第三定律成立的情况。

【例 1】 一炮弹以速度 **F** 飞行，突然分裂为两个质量相等的碎片向两旁飞去。已知其中一块碎片的速度大小仍为 v，但方向与原炮弹方向成 60° 角。试求另一碎片的速度 $\mathbf{v}_2$，分裂前后的机械能守恒吗?

解 炮弹在炸裂的瞬间，由于炸药的化学能转变为炮弹的机械能，而且在这一瞬间内力的作用远大于外力 (例如重力) 的作用，

故可以近似看成孤立系统，即炮弹分裂的前后，系统的动量保持不变。在图8.2所示的坐标系中，在 x 方向

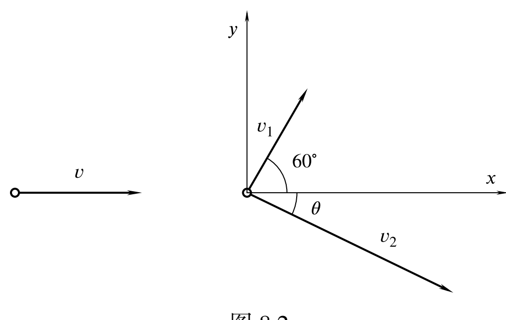


图 8.2

$$
\begin{aligned}
mv &= \frac{m}{2}\left(v_1\cos 60^\circ + v_2\cos\theta\right)\\
&= \frac{m}{2}\left(v\cos 60^\circ + v_2\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

在 y 方向

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{2}\left(v_1\sin 60^\circ - v_2\sin\theta\right)\\
&= \frac{m}{2}\left(v\sin 60^\circ - v_2\sin\theta\right)
\end{aligned}
$$

由上两式可得

$$v(2-\cos 60^\circ) = v_2\cos\theta$$

$$v\sin 60^\circ = v_2\sin\theta$$

因此可以求得

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin 60^\circ}{2-\cos 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即 $$\theta = 30^\circ$$

又
$$
\begin{aligned}
v_2 &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}v\\
&= \sqrt{3}v = 1.73v
\end{aligned}
$$

故分裂前后动能之差为

$$\begin{aligned}\Delta T &= \left(\frac{1}{2}+m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v^2\right)-\frac{1}{2}mv^2\\&=\frac{m}{4}\left(v^2+3v^2\right)-\frac{1}{2}mv^2\\&=\frac{1}{2}mv^2\end{aligned}$$

动能增加了 1 倍。这能量来源于化学能。

【例 2】 在测量子弹速度时，往往用冲击摆。将质量为 m_1 的重物 (装砂的木箱) 用 8 根绳挂起，使它只能摆动，不能转动，绳长 1 厘米 (8.3)。开始时重物静止，将质量为 m_2 的子弹沿重物能够摆动的方向水平地射入重物，m_1 与 m_2 发生完全非弹性碰撞，即碰后重物和子弹一起运动，而偏离其平衡位置最大到 α 角。计算子弹在进入重物时的速度 v。

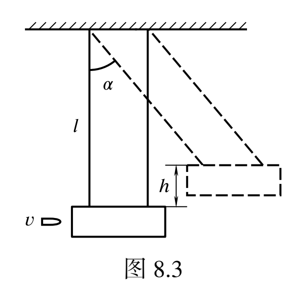


图 8.3

解 子弹与 m_1 相碰时，在水平

方向没有外力作用，故以地球为参考系，以 m_1，m_2 为系统，在水平方向系统的动量守恒。此后，子弹与 m_1 一起以速度 u 运动。由于 (m_1+m_2) 上有重力 $(m_1+m_2)g$ 和张力 T 作用，而张力始终与位移方向垂直，不作功，故 (m_1+m_2) 系统的机械能守恒应用这两个守恒定律，可列出方程

$$m_2v=(m_1+m_2)u$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2=(m_1+m_2)gh$$

解得

$$u=\sqrt{2gh}$$

$$v=\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\sqrt{2gh}$$

由几何关系知

$$h = l(1 - \cos\alpha)$$
$$= 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

所以得

$$v = \frac{2\left(m_1 + m_2\right)}{m_2}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}$$

其中 m_1, m_2, g, l 都是已知数，通过测量 α 可算出 v。

8.2 冲 量

体系能量的变化用外力作的功来描写，体系的动量的变化用什么来描写？这就是本节将要讨论的问题。

根据牛顿第二定律，对于单个质点有

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$$

因单个质点的动量为 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$，故上述方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \tag{8.2.1}$$

即质点动量的变化率等于外力。

若质点在 t_1 时，具有动量 $\mathbf{P}_1$；在 t_2 时，变到 $\mathbf{P}_2$，则由式 (8.2.1) 得

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t \tag{8.2.2}$$

即质点动量的变化，等于力对时间的积分。

$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t$ 称为冲量。如果力为常量，则在 t_1 到 t_2 间的冲量可写为 $\mathbf{F}\left(t_2 - t_1\right)$。所以，冲量就是度量动量变化的物理量。

比较式(8.2.2)与式(6.2.8)〔考虑到式(6.2.1)〕，两者在形式上是非常相似的，前者是力对时间的积分，后者是力对空间的积分；前者反映出力与时间的联系，后者反映出力与空间的联系。由此也可看到动量守恒与能量守恒二者的相同与不同。

作为动量守恒定律的一个应用，我们来讨论航天飞船问题。飞船之所以能上天，是依靠火箭喷出气体的推动力。现在我们来计算为要达到某一速度需要多少燃料的问题。乍看起来，这似乎是个与燃料化学性质等有关的复杂问题，实际上，根据动量守恒，可以给出一个基本关系。因为在应用动量守恒定律时，根本不需顾及力的具体性质。

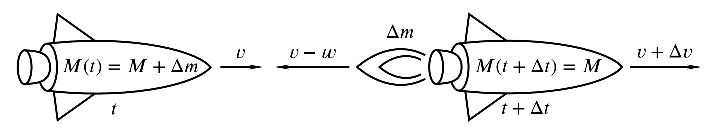


图 8.4　飞船的运动

如图8.4所示，在 t 时刻，飞船的质量为 $M(t)=M+\Delta m$，速度为 v；在 $t+\Delta t$ 时刻，喷出质量 Δm，飞船质量变为 $M(t+\Delta t)=M$，速度变为 $v+\Delta v$，如果喷出质量相对主体的速度为 w，则喷出质量相对于地面的速度是 $(v-w)$。我们可以把它们看作两个质点构成的孤立体系 (忽略重力等其他作用)，根据动量守恒，有

$$\begin{aligned}&(M+\Delta m)v\\=&\Delta m(v-w)+M(v-\Delta v)\end{aligned}$$

整理后得

$$\Delta m w = M\Delta v \tag{8.2.3}$$

两边除以 Δt 后，得

$$w\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{k}{t}=M\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 的极限情况，上式成为

$$w\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{8.2.4}$$

这就是飞船所要满足的动力学方程，$\frac{\Delta m}{\mathrm{d}t}$ 是单位时间内所喷出燃料的质量。

我们还可以进一步改写式(8.2.4)，因为

$$\begin{aligned}\Delta m &= M(t) - M(t+\Delta t)\\ &= -\Delta M\end{aligned}$$

故由式(8.2.3)，得

$$\begin{aligned}\Delta v &= w\frac{\Delta m}{M}\\ &= -w\frac{\Delta M}{M}\end{aligned}$$

写成微分关系，则有

$$\mathrm{d}v = -w\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

积分后，得到

$$\begin{aligned}v_2 - v_1 &= -w\int_{M_1}^{M^2}\frac{\mathrm{d}M}{M}\\ &= w\ln\frac{M_1}{M_2}\end{aligned}$$

如果开始时，飞船速度 $v_1 = 0$，质量 $M_1 = M_{总} = M_{船} + M_{燃料}$，燃料燃烧完时，飞船达到的速度为 $v_2 = v$，质量为 $M_2 = M_{船}$，则

$$\begin{aligned}v &= w\ln\frac{M_{总}}{M_{船}}\\ &= w\ln\left(\frac{M_{船} + M_{燃料}}{M_{船}}\right)\\ &= w\ln\left(1 + \frac{M_{燃料}}{M_{船}}\right)\end{aligned} \tag{8.2.5}$$

这就是我们所需要的一般关系。它告诉我们燃料的质量、飞的质量、气体的喷出速度与飞船所能达到的速度之间的关系。

8.3　碰　　撞

所谓碰撞，包括相当广泛的一类物体间的相互作用过程。处碰撞问题，是动量守恒定律最重要的应用之一。

碰撞过程的基本特点如下：在碰撞之前，相碰的物体相距很以致它们之间没有相互作用力，每个物体都处在自由运动的态，并且保持这科状态不变。当物体相互接近后，它们之间发作用，相互作用能够产生各种各样的结果。例如，可能使物体合在一起，也可能产生新的物体。在这种作用之后，物体又分离，到各自的自由运动状态不变。因此，碰撞所要讨论的是从碰前自由状态变到碰后自由状态的过程。显然，对于碰撞的中间过，是很难研究的。一方面，碰撞时物体之间的作用很强，要决力的具体形式，往往是十分复杂的；另一方面，我们很难直接量和记录碰撞时的现象。尤其是在原子实验中，对于电子和质相碰，记录它们碰撞时的情况，几乎是不可能的。但对碰撞前碰撞后进行测量是比较容易的。所以，在碰撞问题中，我们往是根据碰撞前和碰撞后的性质来研究相碰物体之间的相互作用性质。即通过碰撞的始末情况，我们能推测相互作用的某些性例如，按照碰撞前与碰撞后物体的性质，可以将碰撞分成两类：弹性碰撞及非弹性碰撞。所谓弹性碰撞是指碰撞后的物体然是原来的物体，而且这些物体的内部状态没有变化。碰撞后物体不同于碰撞前的，或者物体虽同但内部状态不同的碰撞都于非弹性碰撞。

在日常遇到的碰撞现象中，几乎都是不同程度的非弹性的。为碰撞往往伴随着使物体变热，即物体的动能部分地转化成热能，这就改变了物体的内部运动状态。尽管如此，弹性碰撞概念

在物理中是非常重要的。因为，在原子、核子的碰撞现象中，有许多是理想的弹性碰撞。由上述弹性与非弹性的分类原则，可以断言：机械能守恒的碰撞，是弹性碰撞 3 机械能不守恒的碰撞，是非弹性碰撞。因为后一情况必定伴随着其他形式能量的作用，也就是伴随着改变物体的内部状态。

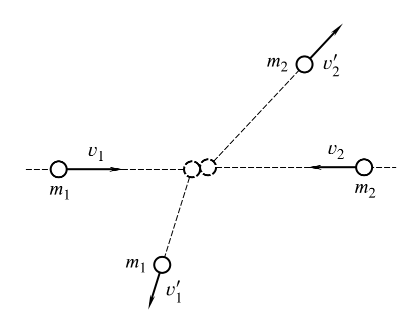


图 8.5　两质点的碰撞

现在，我们来研究质量为 m_1 及 m_2 的两个质点的弹性碰撞的一般性质。假设在碰撞前二质点的速度分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$，碰撞后分别是 $\mathbf{v}_1'$ 和 $\mathbf{v}_1'$ (图 8.5)。根据动量守恒，有

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \tag{8.3.1}$$

因为是弹性碰撞，故机械能守恒。由于碰撞前后两质点都处在没有相互作用的自由运动状态，所以碰撞前后只有动能，根据机械能守恒，总动能不变，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\\ =&\frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

式(8.3.1)、(8.3.2)就是弹性碰撞所应遵循的两个一般的关系。

式(8.3.1)、(8.3.2)没有涉及碰撞物体间相互作用力的具体性质。这表明即使我们对它们之间的相互作用力的细节不清楚，也可以得到一些碰撞所必须遵守的一般关系。这个例子再次说明了守恒定律在讨论力学问题时的重要性。当然，如果我们想知道並撞的细节，则必须弄清作用力的具体情况。

在加速器的粒子碰撞实验中，靶上的粒子是不动的，因此有 $\mathbf{v}_1 \neq 0, \mathbf{v}_2 = 0$。我们首先讨论一种简单的情况。假定所有的速度方向都是平行或反平行，即化为一维问题，这时式(8.3.1)、(8.3.2)可写为

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{8.3.3}$$

$$m_1 {v_1'}^2 = m_1 {v_1'}^2 + m_2 {v_2'}^2 \tag{8.3.4}$$

上两式可改写为

$$m_2 v_2' = m_1 \left(v_1 - v_1'\right) \tag{8.3.5}$$

$$m_2 {v_2'}^2 = m_1 \left(v_1^2 - {v_1'}^2\right) \tag{8.3.6}$$

将两式相除，得到

$$v_2 = v_1 + v_1'$$

再与式(8.3.5)联立解之，发现

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

由解式(8.3.7)，可以得出一些有用的结论：当 $m_1 > m_2$，$v_1' > 0$，即入射粒子碰撞后仍向前运动；当 $m_1 < m_2$，$v_1' < 0$，即入射粒子碰撞后向反向运动了；若 $m_1 = m_2$，则 $v_1' = 0$，而 $v_2' = v_1$，这相当于两个粒子的速度相互交换了。

现在讨论另一种简单情况，即相碰撞的两个粒子的质量是一样的 $(m_1 = m_2)$，且 $\mathbf{v}_2 = 0$，但速度方向不一定是平行或反平行。这时，式(8.3.1)、(8.3.2)成为

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \tag{8.3.8}$$

$$v_1^2 = {v_1'}^2 + {v_2'}^2 \tag{8.3.9}$$

式(8.3.8)表明，三个矢量 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_1'$，$\mathbf{v}_2'$，构成一个三角形；而从式(8.3.9)可以知道，这个三角形必定是以 $\mathbf{v}_1$ 为斜边的直角三角形

(图8.6)，因而 $\mathbf{v}_1'$ 和 $\mathbf{v}_2'$ 必定互相垂直，即在碰撞后，两粒子的运动方向一定是相互垂直的。由此，我们得到一个非常有用的图形，称为散射圆 (图8.7)。圆的直径是 v_1，由于 $\mathbf{v}_1' \perp \mathbf{v}_2'$，所以，直角三角形的顶端一定在圆周上。这样，如果测得了入射粒子碰撞后

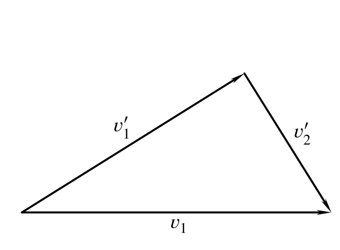


图 8.6　碰撞速度之间的关系

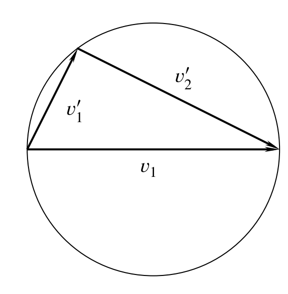


图 8.7　散射圆

的运动方向，从图上可以立即求得靶中被撞出的粒子的速度的大小和方向。

这个结果在实验中很有实用价值。譬如，在研究质子与质子弹性碰撞的实验中，我们知道，高能质子打在靶上，会撞出多种粒子，它们都是非弹性碰撞。我们如何才能专门测得质子与质子的弹性碰撞呢？根据上述分析，如果把两个测量质子的计数器放在相互垂直的位置 (图8.8)，并且测量符合散射圆的质子，则我们测得的就是弹性碰撞的事件。

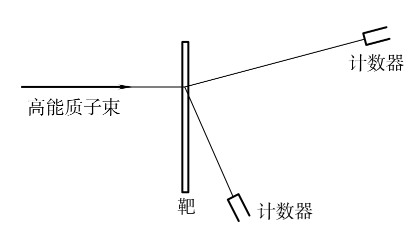


图 8.8　测量质子-质子弹性散射

对于质量不等的粒子间的碰撞，我们也可以求得类似的散射图，用以指导我们的实验。

8.4 质 心 定 理

本节讨论动量守恒的另一种描述方式。

我们首先讨论由质量为 m_1, m_2，位置矢量为 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 的两个质点所构成的孤立体系 (图8.9) 这个体系的动量守恒，即

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = 0$$

或

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\
&= m_1 \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2\right) \\
&= \left(m_1 + m_2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right) \\
&= \left(m_1 + m_2\right) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t} \\
&= \text{不变量}
\end{aligned} \tag{8.4.1}$$

其中，我们用了一个新的物理量 $\mathbf{r}_c$，定义为

$$\mathbf{r}_c \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{8.4.2}$$

它表示一个位置，即图 8.7 中的 C 点，称为体系的质心位置。

对式(8.4.1)再次求导，得

$$\left(m_1 + m_2\right) \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{8.4.3}$$

式(8.4.3)表明，对孤立体系，其质心的加速度为零，即 C 点的加

速度为零。因此，动量守恒定律又可陈述为：孤立体系的质心作匀速直线运动或静止，这就是质心定理。

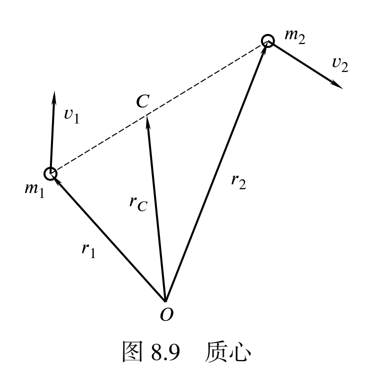


图 8.9　质心

应当强调，质心可能并不在体系中的任何一个质点上，它是由式(8.4.2)形式定义的一个物理量。这里我们第一次看到，一个有用的物理量，可能并不对应着一个实际的东西。这种具有抽象性质的物理量，在以后的物理学中，我们将会越来越多地碰到。

很容易把质心定理推广到多质点构成的孤立体系。由动量守恒定律，用上述类似的推导可知，一个由 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 质点所构成伪体系，其质心位置应是

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{8.4.4}$$

其中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n$ 分别为各质点的位置。这时，动量守恒定律可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{8.4.5}$$

现在我们进一步讨论不仅有内力作用，而且也有外力作用的非孤立体系的情况。我们仍采取上述质心的定义，则质心速度为

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_c &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\left(m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\left(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n\right)
\end{aligned}$$

质心的加速度为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\left(m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}+m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_n}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\left(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\cdots+\mathbf{F}_n\right)
\end{aligned}
\tag{8.4.6}
$$

其中 $\mathbf{F}_i$ 是第 i 个质点所受到的总力，等于内力与外力之和。

根据牛顿第三定律，体系的内力成对出现，且大小相等，方向相反，所以在式(8.4.6)中内力全部相互抵消了。因此(8.4.6)式成为

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}\left(\mathbf{F}_{1\text{外}}+\mathbf{F}_{2\text{外}}+\cdots+\mathbf{F}_{n\text{外}}\right)
$$

或

$$
M_{\text{总}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_c}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{\text{外}} \tag{8.4.7}
$$

其中 $M_{\text{总}} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$，称为体系的总质量；$\mathbf{F}_{1\text{外}}+\mathbf{F}_{2\text{外}}+\cdots+\mathbf{F}_{n\text{外}}$ 是体系所受到的总外力；$\mathbf{F}_{i\text{外}}$ 是第 i 个质点所受外力。

式(8.4.7)就是质心定理的一般形式，它是非常有用的。我们知道，一个体系的运动，一般是相当复杂的，因为 n 个质点都在相互运动，不仅有内力，还要考虑外力。但是，式(8.4.7)告诉我们，如果不考虑每个质点运动的细节，而只考虑体系的质心运动，则其动力学方程与单个质点的动力学方程完全相同。这就是说，一个体系，在某些方面可用一个质点来标志，这个质点的质量等于体系的总质量，位置在质心，所受的力等于体系的外力的总和，

它的运动满足牛顿第二定律。不管内力如何复杂，这个结论是普遍适用的。我们常把很大的物体 (譬如地球) 看为质点，其根据正在于此。在考虑地球的某些方面的运动，譬如说绕太阳的整体运动，可以把它作为质点来处理。虽然地球内部有各种各样的互作用，却可以完全不必顾及，只需考虑外力——太阳引力的作用就行了。

应当再强调一点，在式(8.4.7)中，总质量 $\boldsymbol{M}_{总}$ 是各质点质量之和，即

$$\boldsymbol{M}_{总} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{8.4.8}$$

这个等式似乎很平凡，谁都知道，复杂物体的质量等于各部分的质量之和。但若仔细考察这个关系，也并不那么显然。宏观物体都是由分子、原子构成的，而原子、分子在不停的运动着，为什么物体的总质量与分子及原子的复杂运动状态无关，而一定等于各分子、原子的质量之和呢？这并不是显而易见的。因此，我们应当记住，式(8.4.8)只是牛顿力学中的一个结果，而并不是不证自明的。

思 考 题

1. 质心与重心在概念上有什么类似之处？质心和重心在什么情况下重合？在什么情况下不重合？

2. 质心与几何中心这两个概念有无关系？在什么情况下重合？在什么情况下不重合？

3. 选取质心作为坐标原点的参考系，叫做质心系。质心系一定是惯性系吗？

4. 动量守恒定律在任何参考系中都成立吗？

5. 只有外力才能改变物体质心的运动状态，为什么制动机对车轮所施的内力能使车停下来？

6. 试问能否由装在船上的风扇所煽动的空气对帆的冲击而推动船前进?

7. 一只鸟关在一个封闭的盒子里，盒子放在磅秤上。当鸟静止在盒中时，秤的指示为 W。试问当鸟或以匀速在盒中飞绕，或加速向上飞或向下俯冲时，秤的指示是 W 吗？为什么？

8. 对于可变质量系统，是否可用方程

$$\mathbf{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\mathbf{v}) = M\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

来描述，为什么？

9. 火箭能够在真空中被加速吗？火箭的推力是指什么力？设若一火箭单位时间排出燃料的质量为 $\frac{\Delta M}{\Delta t}$，燃料向后喷发相对火箭主体的速率是 u。试问此时该火箭的推力是多少？

10. 直升飞机是靠什么力停在空中？它为什么要用很大的螺旋桨？

11. 对于由于相对论效应而有质量变化的系统，可以用方程 $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\mathbf{v})$ 吗？为什么？

12. 判断下述各过程中系统的动量是否守恒？为什么？

(1) 小球与墙壁相碰，把小球和墙壁当作一个系统。

(2) 静止在光滑水平面上的 A，B 两木块，由一弹簧连接着，先将两木块水平地拉开，再由静止释放。以 A，B 和弹簧作为一系统。

(3) 两小球在桌面上相撞，以两小球作为一系统，考虑小球和桌面有摩擦和没有摩擦两种情形。

(4) 人向上抛球接球的过程。以人和球作为一系统，以人、球和地球作为一系统。

习　题

1. 三个质量分别为 100 克、200 克和 300 克的物体，分别放在 $(0, 30厘米)$、$(40厘米, 0)$ 和 $(0, 0)$ 处，试求质心位置 (x_c, y_c)。

2. 一均匀材料做成正方形，每边长 4.0 米，在其一角上切去一个边长为 1.0 米的小正方形后，放置如图8.10形状，求余下物体的质心位置 (x_c, y_c)。

图 8.10

3. 在半径为 50 厘米的均匀圆盘上，有一半径为 30 厘米的圆孔，孔的中心距圆盘中心为 10 厘米。求圆盘剩下部分的质心位置。

4. 试求一个半径为 a 的半圆形均匀平板的质心。它的安放如图8.11所示。

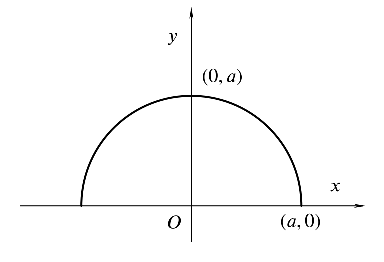


图 8.11

5. 一质量为 m 的人抓住一根挂在质量为 M 的气球下面的绳梯，最初气球和人相对于地面是静止的。试问：

(1) 如果这人以相对于气球为 v 的速率向上攀登，气球将向什么方向运动？速率多大？

(2) 这人停止攀登后，气球的运动状态如何？

6. 质量 70 公斤的渔人站在船上，设船和渔人的总质量为 200 公斤，船静浮于水面。若渔人在船上向船头走 4.0 米后静止。试问：以岸为参考系，渔人走了多远 (不计水的摩擦)？

7. 已知月球质量约为地球质量的 0.013 倍，月、地中心相距约为地球半径的 60 倍，取地球半径为 6400 公里。试问月-地系统的质心离地球中心多远？

8. $m_1 = 12$ 公斤和 $m_2 = 20$ 公斤的两个半径相同的、无相互作用的金属球，均静止地放在水平光滑的桌面上，两球中心相距为 $l = 0.4$ 米。今沿二球心联线方向在 m_2 上加 $\mathbf{F} = 64$ 公斤力，使 m_2 远离 m_1，试求：

(1) 质心在未加力时的位置 $x_c(0)$；

(2) 在力 $\mathbf{F}$ 作用下质心的加速度；

(3) 质心在加力后 3.0 秒末移动的距离；

(4) 以地球为参考系，在 3.0 秒末体系的动能 E_0；

(5) 在质心参考系里，3.0 秒末体系的动能 E'。

9. 有一质量为 m_1、速度为 v_1 的粒子，与一质量为 m_2、原来静止的粒子发生完全非弹性碰撞。试证明：这碰撞过程的机械能损失恰好等于在质心系中系统原来的动能。

10. 有一质点系，起始时位置是 $m_1 = 4.0$ 公斤，坐标为 $(1, -3)$；$m_2 = 8.0$ 公斤，坐标为 $(4, 1)$；$m_3 = 4.0$ 公斤，坐标为 $(-2, 2)$，坐标单位为米。它们各个受力是：$\mathbf{F}_1 = 14$ 牛顿，沿 x 方向；$\mathbf{F}_2 = 16$ 牛顿，沿 y 方向；$\mathbf{F}_3 = 6$ 牛顿，沿负 x 方向。它们分别在所受力的作用下独立运动。试求：

(1) 各质点的加速度 a_1，a_2，a_3；

(2) 开始时的质心坐标；

(3) 质心的加速度 a_c。

11. 两球 A，B 质量相等 $(m_A = m_B = m_c)$，在光滑的水平面上相碰，碰前速度分别为 $v_{A_0} = 80$ 米/秒，$v_{B_0} = 0$；碰撞后分别沿与原 A 球运动方向成 30° 和 45° 角前进，如图8.12所示。试求：

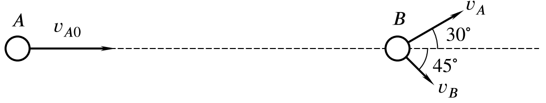


图 8.12

(1) 碰撞后两球的速度 v_A，v_B；

(2) 因碰撞损失原有动能的百分之几?

12. 质量为 $m = 200$ 克的弹性球撞到墙上，并被墙弹回。碰撞前后速度的方向都和墙垂直，速度的大小都是 $v = 5.00$ 米/秒。球和墙的碰撞时间为 $\Delta t = 0.050$ 秒。试求碰撞时间内球和墙的相互作用力的平均值 $\overline{f}$。

13. 有一个 90 公斤重的人，从 2.0 米高处往地面跳，若他每只脚踝骨的接触面积是 5.0厘米^2，已知人的骨头抗压强度约为 1.5×10^4牛顿/厘米^2。试问：

(1) 若他与地面碰撞期间，他的质心向下移动 1.0 厘米，那么，他的踝骨会发生骨折吗?

(2) 若他与地面碰撞期间，他的质心降低了 50 厘米，他的踝骨上单位面积平均接受多大冲力?

14. 质量为 3.0 公斤的木块静止在水平桌面上，质量为 5.0 克的子弹沿水平方向射进木块。两者合在一起，在桌面上滑动 25 厘米后停止。木块与桌面的摩擦系数为 0.20。试求子弹原来的速度。

15. 如图8.13所示，长为 $l = 30.0$ 厘米，最大强度为 $T = 1.00$ 公斤力的绳子，系一质量为 $m = 500$ 克的小球，若 m 原来静止不动。试问：要用多大的水平冲量作用在 m 上，才能把绳子打断?

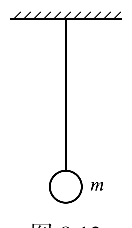


图 8.13

16. 在放射性衰变中，一个 α 粒子 (氦原子核) 由最初处于静止状态的 ^{238}U 的核中，以速率为 1.4×10^7 米/秒被发射出来。试求剩余质量 (^{234}Th) 的反冲速率。

17. 如图8.14所示，小球 m_2 静止在光滑的半圆形碗的底部，碗的半径为 R。另一小球 m_1 自碗边由静止开始下落，并与 m_2 作

完全非弹性碰撞。求：

(1) 碰后的一瞬间，m_1 和 m_2 对碗底的压力；

(2) m_1 和 m_2 上升的最大高度。

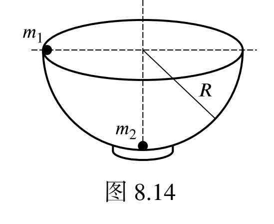


图 8.14

18. 光滑平面上有两物体 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，质量分别为 m_A 和 m_B。在一轻弹簧的作用下彼此分开，各自以 v_A 和 v_B 的速度作惯性运动。试证明分开之后，两物体的动能之比为 $\dfrac{E_{kA}}{E_{kB}}=\dfrac{m_B}{m_A}$(图8.15)。

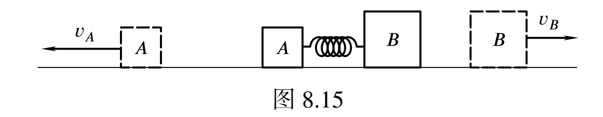


图 8.15

19. 质量分别为 $m_1 = 5.0$ 千克和 $m_2 = 3.00$ 千克的两球，分别以速率 $v_1 = 12$ 厘米/秒和 $v_2 = 4.0$ 厘米/秒作对头碰撞。求在下列两种情况下，碰撞后的速度：

(1) 完全弹性碰撞

(2) 完全非弹性碰撞。

20. 如图8.16所示，一个 60 公斤的人站在 50 公斤的平板车上。最初车子以 $v_0 = 10$ 米/秒的速度在水平光滑的轨道上向右匀速运动。若此人对平板车以 $u = 5.0$ 米/秒的速度向左跑去。试问：

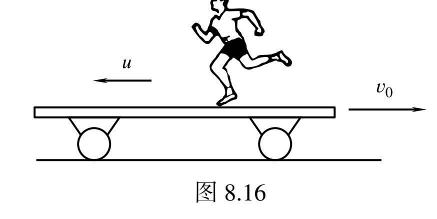
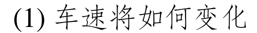
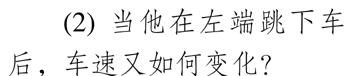


图 8.16



(1) 车速将如何变化



(2) 当他在左端跳下车后，车速又如何变化？

21. 如上题，但车上有两个人，各重 60 公斤，车和人最初都

静止。试问：

(1) 若一人相对车子以 5.0 米/秒的速率首先跑到车的左端并跳下之后，另一人相继再重复第一人的动作，最后车子的速度是多少？

(2) 若两人同时相对车子以 5.0 米/秒的速率跑到车的左端并跳下，车子的速度又是多少？

22. n 个体重均为 m 的人，站在重为 W 的平板车上。车沿着平直路轨无摩擦地向前运动，速度为 v_0。如果每个人都以相对于车的速率 u 向车后跑并跳下车，求在下列两种情况下，人都跳下车后，车的速度 v。

(1) 一个一个地跳 (一个人跳离后，另一人才起步)；

(2) 全体同时跑，同时跳离车子。

23. 一个三级火箭，各级重量如下表所示，不考虑重力，火箭的初速为零。

级　别	发射总质量	燃　料	燃料外壳
一　级	60 吨	40 吨	10 吨
二　级	10 吨	20/3 吨	7/3 吨
三　级	1 吨	2/3 吨	

(1) 若燃料相对于火箭喷出速率为 $u = 2500$ 米/秒，每级燃料外壳在燃料用完时将脱离火箭主体，设外壳脱离主体时，相对于主体，其速度为零，只有当下一级火箭发动后，才将上一级的外壳甩在后边。求第三级火箭的最终速率。

(2) 若把 48 吨燃料放在 12 吨的外壳里组成一级火箭，问火箭最终速率是多少？

24. 一宇宙飞船以恒速 $\mathbf{v}$ 在空间飞行，飞行过程中遇到一股微尘粒子流，这些微尘粒子流以 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 的速率沉积在飞船上，尘粒在落到飞船之前的速度为 $\mathbf{u}$。在时刻 t，飞船的总质量为 $M(t)$。试

问：要保持飞船匀速飞行，需要多大的力？

25. 一雨滴的初始质量为 M_0，在重力作用下、从静止开始降落。假定此雨滴从云中得到质量，其质量的增长率正比于它的瞬时质量和瞬时速率的乘积，即 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=kMv$，其中 k 为常数。若忽略空气阻力，试证明雨滴的速率最终成为恒量，并给出最终速率的表达式。

26. 如图8.17所示，一半径为 R 的光滑球，质量为 M，静止在光滑的水平桌面上。在球顶点上有一质量为 m 的质点。m 自 M 球自由下滑。试求 m 离开 M 之前的轨迹。

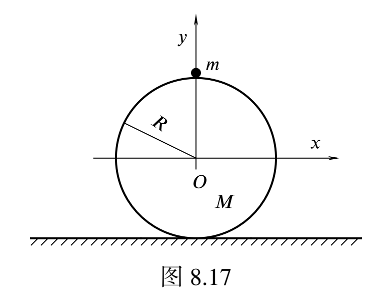


图 8.17

27. 一个水平运动的皮带将砂子从一处运到另一处，砂子经一垂直的静止漏斗落到皮带上，皮带以恒定的速率 v 水平地运动着（见图8.18(a)）。忽略机件各部位的摩擦。若砂子落到皮带上的速率是 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$，试问：

(1) 要保持皮带以恒定速率 v 运动，水平总推力 F 多大？需要多大的功率？

(2) 通过皮带提供的能量中有多少转化成砂子的动能？其余能量到哪里去了？

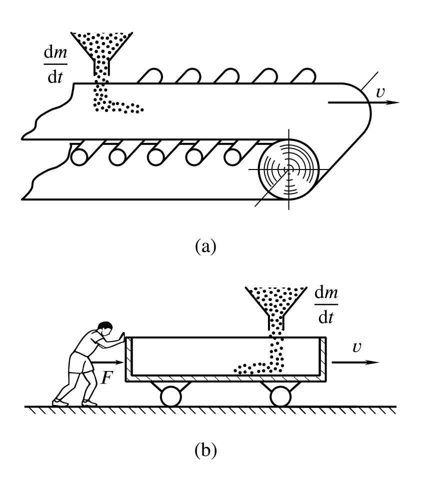


图 8.18

(3) 若整个装置是：漏斗中的砂子落进以匀速 v 在平直光滑轨道上运动的货车里，以上诸问的答案有改变吗〔见图8.18(b)〕？

28. 线密度为 ρ、长度为 l 的链条，用手提着一头，另一头刚好触及地面，静止不动。如图8.19所示。突然放手，使链条自由下落。求证：当链条的上端下落的距离为 s 时，链条作用在地面上的力为 $3\rho gs$。

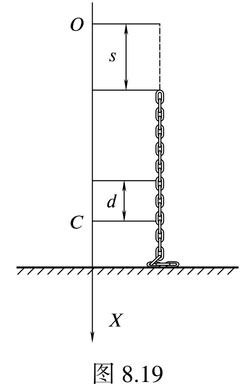


图 8.19

〔提示：有两种求证方法：

(1) 平台不仅要支持已落到台上并静止的链的重力 $(s\rho g)$，还要使该时刻到达的链子动量降为零；

(2) 求出链子质心的位置 x_c：在图819中，设 C 为链子的质心位置，d 为质心到尚未落下链子 $(l-s)$ 中心 K 距离。在质心系则质心坐标为零，故得，$0=(l-s)\,d-\left(\dfrac{l-s}{2}-d\right)s$，由此求得 $d=\dfrac{s\,(l-s)}{2l}$。从几何关系知 $x_c=s+\dfrac{l-s}{2}+d=s+\dfrac{l}{2}-\dfrac{s^2}{2l}$，对 x_c 求导即得 $\ddot{x}_c=\dfrac{1}{l}\left(\ddot{s}^2+s\ddot{s}\right)$，再由 $mg-F=m\ddot{x}_c$ 即得证〕。

29. 两个物体的恢复系数 r 定义为它们分开的速度和接触时速度之比，$0\leqslant r\leqslant 1$。用它可解决一些既非完全弹性又非完全非单性的碰撞问题。试证明：

(1) 如果一个球和一个重的水平板之间的恢复系数为 r，则这球掉下来经过 n 次弹跳后，它反弹的高度为 h_0r^{2n}，其中 h_0 是此球开始掉下来的高度；

(2) 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，以恢复系数 r 发生正面碰撞，则因碰撞失去的动能为质心系中动能的 $(1-r^2)$ 倍。

30. 如图8.20所示，物体 M 和弹簧原来都处于静止状态，弹簧的倔强系数为 k。若有一质量为 m 的物体从 h 高度自由下落，撞在物体 M 上，设 m 与 M 作完全非弹性碰撞，求弹簧对地面的最大压力 N(弹簧本身质量可忽略不计)。

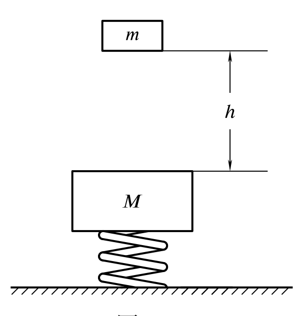
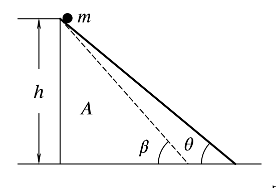


图 8.20

31. 在光滑的水平桌面上，有 A 和 B 两个大滑块，它们的表面都十分光滑，质量都是 M，高度都是 h_0。A 滑块是一段规则的三棱柱，B 滑块是凹面棱柱，B 凹面的下端与接触的桌面相切 (图8.21)。在 A 与 B 的顶端各放置一个质量为 m 的质点。开始时，两个系统都静止，然后让 m 自由下滑。设若 m 滑至桌面时没有跳动，都继续沿水平面滑行，试问：

(1) 当质点 m 与滑块分离后，两种情况的 m 与 M 的速度 v_A，V_A，v_B，V_B 各为多少？

(2) 在这两种情况下，m 与 M 分开后机械能的变化各为多少？部分损失的机械能到哪里去了？



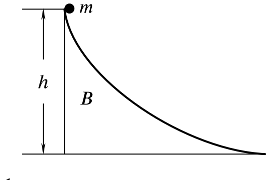


图 8.21

〔提示：对于 A 的情况，m 实际上是沿图8.21中虚线到达水

平面，m 的速度方向与水平面夹角为 β。m 与桌子平面的碰撞在竖直方向是完全非弹性碰撞，系统只在水平方向保持动量守恒：$mv_{斜}\cos\beta = MV_A$。）

32. 有一固定的光滑斜面，倾角为 θ 有一小物体，质量为 m，从高 H 处自由下滑，滑到斜面底 C 点之后，继续沿水平面平稳地滑行 (图8.22)。设 m 所滑过的路程全是光滑无摩擦的，试求：

(1) m 到达 C 点瞬间的速度 v_{c0}；

(2) m 离开 C 点的速度 v_c；

(3) m 在 C 点的动量损失及机械能量损失。

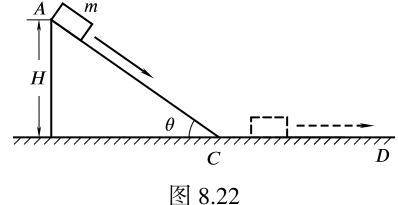


图 8.22

33. 一个小物体 m 从高为 h、倾角为 θ 的斜面上由静止开始下滑，然后又在水平面上继续前进一段距离 s 后停止 (图8.23)。设物体与斜面和平面的摩擦系数都为 μ_0。求：

(1) 它在平面上前进的距离 s；

(2) 当倾角 θ 很小 (但 θ 角一定要大于摩擦角 φ，即 $mg\sin\theta > \mu mg\cos\theta$，$\theta > \mathrm{tg}^{-1}\mu = \varphi$) 时，取 $\cos\theta \approx 1$，$\sin\theta \approx 0$，将这结果与第六章习题 11 的结果进行比较。

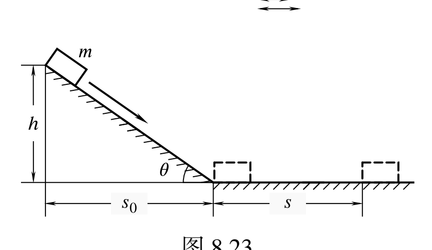


图 8.23

34. 一条质量为 M，长为 l 的链子在桌子边缘上盘在一起。链子的一端有极小的一段被推出桌子边缘，在重力作用下开始下落，并把越来越多的链子从桌面拉出来。假定链子各部分在未被拉入运动前速度一直保持为零，只是突然一下子以下落部分的速度开

始运动。试问：

(1) 链子下落段长为 x 时的速度是多少?

(2) 当链子全部长度刚离开桌面的瞬间，原来的势能有多大部分转化为链子的动能?

35. 一喷气式飞机的质量为 M，它的发动机把空气吸进来又由机尾喷出去。喷出的气流对于飞机的速度是不变的，等于 u；每秒钟喷出去的气的质量也是不变的，等于 m。设各处的摩擦力都可略去，若在 $t=0$ 时飞机由静止出发并保持水平飞行，试求：

(1) 飞机的速度 v 与时间的关系；

(2) 飞机的瞬时效率 η 与 u 和 v 的关系，何时最大? 最大值 η_{max} 等于多少?

第九章

角动量守恒

9.1 角动量守恒

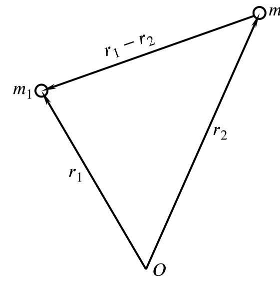


图 9.1 两质点体系

在这一章里，我们再讨论一种守恒定律。

我们仍然由两个质点构成的孤立体系开始讨论。图9.1所表示的两质点体系，其动力学方程是：

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{2\to1} \tag{9.1.1}$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{1\to2} \tag{9.1.2}$$

其中 $\mathbf{F}_{2\to1}$ 是质点 2 对 1 的作用力；$\mathbf{F}_{1\to2}$ 是质点 1 对 2 的作用力，没有外力的作用，并且根据牛顿第三第律

$$\mathbf{F}_{1\to2} = -\mathbf{F}_{2\to1} \tag{9.1.3}$$

用矢量 $\mathbf{r}_1$ 对式(9.1.1)两边进行矢积，得到

$$\mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2\to1}$$

根据矢量的微分法则，上式右边有

$$m_1 r_1 \times \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = m_1 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) - m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{v}_1$$

$$= m_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) - m_1 \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1$$

$$= m_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1)$$

所以

$$m_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2\to1} \tag{9.1.4}$$

根据同样方法，由式(9.1.2)可得

$$m_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1\to2} \tag{9.1.5}$$

把式(9.1.4)与式(9.1.5)相加，得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2) \\
&= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2\to1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1\to2} \\
&= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2\to1} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2\to1} \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2\to1}
\end{aligned} \tag{9.1.6}$$

由图 9.1 可知 $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 在两点连线上，根据牛顿第三定律，$\mathbf{F}_{2\to1}$ 的方向也沿着两质点的连线方向，所以

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2\to1} = 0$$

故式(9.1.6)变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2) = 0 \tag{9.1.7}$$

(9.1.7) 我们定义

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r}_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2\mathbf{v}_2 \tag{9.1.8}$$

它称为体系的角动量，故式(9.1.7)可写为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

或

$$\mathbf{L} = \text{不变量} \tag{9.1.9}$$

式(9.1.9)表明，对于这个体系，我们找到了一个新的守恒律，即角动量守恒律。同样，我们可以定义

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{9.1.10}$$

为单个质点的角动量。对于孤立体系，每个质点的角动量时刻在变化，但它们之和却不随时间变化，这就是角动量守恒定律。很容易将上述角动量守恒定律推广到多质点构成的体系。只要一个孤立体系的内力满足牛顿第三定律，用类似的方法可以证明

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

或

$$\mathbf{L} = \text{不变量} \tag{9.1.11}$$

其中 $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$，是体系中各质点的角动量的和。角动量守恒也是一个独立的规律，即它并不包含在能量守恒或动量守恒规律中。机械能守恒或动量守恒的体系角动量并不一定守恒。反之亦然。另外，与动量守恒定律类似，角动量守恒也是一个矢量关系，它包括三个不变的量，即

$$\begin{aligned} L_x &= \text{不变量} \\ L_y &= \text{不变量} \\ L_z &= \text{不变量} \end{aligned} \tag{9.1.12}$$

再则，与动量守恒定律一样，在证明角动量守恒时，我们使用了牛顿第三定律，因此，在经典力学范围里，角动量守恒的适用性是与牛顿第三定律的适用性联系在一起的。

9.2 力　　矩

现在我们来讨论角动量的变率。根据定义，一个质点的角动量 $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$，其变率为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \mathbf{P})$$
$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$，而 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{P}$ 平行，故上式右边第一项为零。在上式右边第二项中代入 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$，最终得到

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{9.2.1}$$

我们定义

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{9.2.2}$$

它称为力 $\mathbf{F}$ 对坐标原点 O 的力矩，则式(9.2.1)就成为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{9.2.3}$$

式(9.2.3)表明，角动量的变率等于力矩。这个公式与动量形式的牛顿第二定律 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}$ 很相似。角动量与动量相对应，力矩与力相对应。按力矩的定义〔式(9.2.2)〕，显然，同一力 $\mathbf{F}$ 对不同点的力矩是不同的，故式(9.2.3)中的及 $\mathbf{M}$ 应相对于同一点来计算。

现在我们讨论角动量守恒的几个应用。首先研究行星绕太阳的运动 (图9.2)。取太阳为原点，行星受太阳的引力作用。由于引力总是指向太阳的，或称引力为有心的，故相对于原点的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

由式(9.2.3)知

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = 0$$

或

$$\mathbf{l} = \text{不变量} \tag{9.2.4}$$

即行星的角动量是守恒的。行星的动量是不守恒的，因为动量守恒要求没有外力，而角动量守恒是要求没有外力矩。在这里所讨论的情况下，有力而无力矩。我们可以说，不仅引力，对于任何有心力的作用，若取力心为坐标原点，则质点的角动量是不变的。

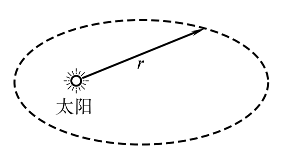


图 9.2　行星绕太阳的运动

【例 1】　某人造卫星在近地点的速度为 $v_1 = 8$千米/秒(速度方向垂直于矢径)，近地点离地面高为 $h_1 = 320$公里，远地点离地面高为 $h_2 = 1397$公里。已知地球的半径为 $R_E = 6378$公里。求在远地点时卫星的速度。

解　卫星受地球作用的万有引力是有心力，故对力心力矩为零，卫星运动时对地球中心的角动量守恒，即

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{常量}$$

在近地点及远地点时，$\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$(图 9 ·3)，故由角动量守恒得

$$l = mr_1v_1$$

$$= mr_2v_2$$

所以

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_2$$

图 9.3

代入已知条件，

$$r_1 = h_1 + R_E$$

$$r_2 = h_2 + R_E$$

得

$$v_2 = \left(\frac{h_1 + R_E}{h_2 + R_E}\right)v_1$$

$$= 6.89\text{公里/秒}$$

由角动量守恒，我们可以推知行星运动的性质：

(1) 行星轨道处在一确定的平面上，是一条平面曲线。

因为 $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$，所以始终垂直于 $\mathbf{r}$ 及 $\mathbf{v}$ 所决定的平面 (这里 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 既不平行也不反平行，故总可决定一个平面)。如果行星不在一固定平面内运动，当它要离开此平面时，速度的方向必不在此平面内，因此 $\mathbf{l}$ 的方向发生变化，与角动量守恒相矛盾。故行星必定始终在同一平面上运动。

(2) 单位时间内扫过的面积为常量，即所谓面积速度不变。

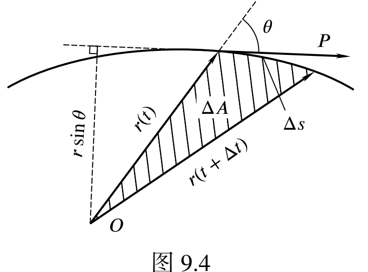


图 9.4

根据定义，角动量的大小为

$$
\begin{aligned}
l &= |\mathbf{r} \times \mathbf{P}| \\
&= rP\sin\theta \\
&= rmv\sin\theta
\end{aligned}
$$

其中 θ 是 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 的夹角。再注意 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，其中 Δs 是在 Δt 时间内行星走过的弧长 (图 94)。则上式成为

$$
l = m\frac{\Delta s \cdot r\sin\theta}{\Delta t}
$$

由图9.4知，

$$
\Delta s \cdot r\sin\theta \approx 2\Delta A
$$

其中 ΔA 是行星在 Δt 时间内扫过的面积。所以

$$
l \approx 2m\frac{\Delta A}{\Delta t}
$$

取 $\Delta t \to 0$ 的极限，得

$$
\begin{aligned}
l &= 2m\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \\
&= \text{不变量}
\end{aligned}
$$

式中 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ 是行星单位时间内扫过的面积，称为面积速度。由上式可得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{2m}=\text{不变量} \tag{9.2.5}$$

这就证明了面积速度不变。这也就是开普勒第二定律 (见第四章)。

由开普勒第一定律知行星轨道是个椭圆，如图9.5所示。这样，为了保持面积速度不变，行星在离太阳近时必定比离太阳远时运动得快一些。按照地球的轨道,在北半球,冬季地球处在近日点附近，夏季地球处在远日点附近。所以，地球绕太阳的公转，在冬季较快而夏季较慢。

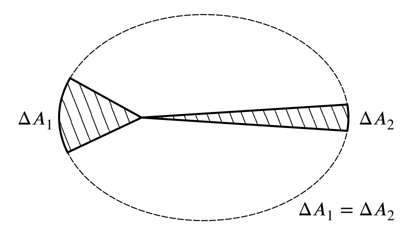


图 9.5　行星的椭圆轨道

在牛顿提出万有引力时，有人就提出一个问题：既然宇宙间只有引力，为什么宇宙中的物体竟不会塌缩到一块，而物体却还能处在相当分散的状态？历史上有许多人从不同角度回答过这个问题。例如，有的人从哲学观点断言：有引力，必定有斥力，所以不会塌缩，康德就是这种观点。其实这种说法是没有根据的。有引力，必定有斥力，这不是一条物理上的原理，哲学也不能代替物理的研究。有引力而不一定会塌缩，原因之一即在于角动量守恒。譬如我们以太阳而言，它对行星有引力，为什么行星不会掉到太阳上去呢？原因就是角动量守恒。因为，当物体掉到太阳上时，不管速度如何，其角动量相对于太阳来说都是零。所以，只要在太阳系形成时，具有一定的角动量，则整个太阳系就不可能塌缩到一块去。在距太阳极远的许许多多运动着的物体中，只有运动方向正对着太阳的那些物体的角动量才为零，而其他物体的

角动量都不是零，这些物体在太阳的万有引力作用下永远不会掉到太阳上去。可见，正是因为太阳与物体之间的作用是万有引力，它是有心力，才使绝大多数物体不可能掉到太阳上去，而不需什么其他的斥力。明确指出这一点的是法国的物理学家拉普拉斯。

对于地球，也有类似的情况。我们知道，地球有时要通过流星带，但绝不会有很多物体轰击到地球上来，因为地球对它们的作用是引力，角动量守恒成立，只有极少数开始相对于地球的角动量为零的那些流星才会掉到地球上来。

人造地球卫星运行一段时间后，会掉回地球上来。这不是由于地球引力作用，主要是由于大气的摩擦。大气摩擦力总是与卫星运动方向相反，对地心的力矩不为零，在此力矩作用下，卫星的角动量逐渐减小，最后掉回地球。我们经常看到陨石掉到地球上来，原因也是摩擦，由于它在宇宙空间中运行时受到微弱摩擦作用，使原来角动量从不为零变到零，从而能落到地球上来。

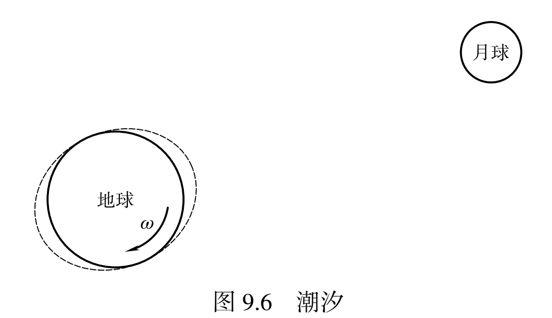


图 9.6 潮汐

现在我们再讨论一下潮汐现象。在某一海滨，海水的高度每天都有规律地升降，这就是潮汐现象。潮汐主要是由月球的引力引起的。在月球引力作用下，地球表面的海水形成如图 9.6 所示的形状，在最靠近月球的一侧和最远离月球的一侧凸出来。地球每天自转一周，因此，地球上确定位置的观察者每天看到两次涨潮，两次退潮。月球一月绕地球一周，因此，海面凸出部位一月

绕地心一周，而地球每天自转一周，所以地球与海面凸出部分之间有相对运动。两部分之间存在摩擦，其力矩是使地球自转变慢。现代地学已证明了地球自转的变慢，在 3 亿年前，地球的一年是 398 天，现在的一年是 $365\frac{1}{4}$ 天，可见变慢不少。到最后，地球自转速度将与月球绕地球转的角速度相同，也就是说，一个月转一周，一天将等于一个月。

如果我们把体系扩大些，把地球和月球近似看作一个孤立体系，它的总角动量应当是守恒的。地、月体系的总角动量等于地球角动量与月球角动量之和。由于总角动量守恒，所以地球角动量减少，必定意味着月球角动量增加。根据开普勒定律，月球速度与地月距离有确定的关系，要想增加角动量，只能增大地、月之间的距离。也就是说，随着地球自转变慢，月亮将离我们越来越远。

9.3 隆格-楞茨矢量

在这一节里，我们再讨论一个守恒量，不过它不是普遍适用的，而只适用于在引力作用下的运动。

再以太阳对行星的引力作用为例，如果取太阳的位置为坐标原点，某行星的位置矢量为 $\mathbf{r}$，则太阳对该行星的吸引力为

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{9.3.1}$$

其中 M 及 m 分别表示太阳及行星的质量 $-\frac{\mathbf{r}}{r}$ 表示力 $\mathbf{F}$ 总是指向太阳的。由牛顿第二定律，行星的运动方程应为

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{9.3.2}$$

第六章中已讨论过，行星运动中机械能是守恒的，即

$$T+V=E(\text{不变量}) \tag{9.3.3}$$

其中 E 为行星的机械能；动能 T 及势能 V 分别为

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{9.3.4}$$

$$V=-\frac{GMm}{r} \tag{9.3.5}$$

上节已证明，行星的角动量也是守恒的，即

$$\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\mathbf{r}\times m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{l}\ (\text{不变量}) \tag{9.3.6}$$

现在，我们定义一个新的物理量 $\mathbf{B}$，它由下式定义

$$\mathbf{B}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}-GMm\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{9.3.7}$$

它称为隆格-楞茨矢量。可以证明，隆格-楞茨矢量也是一个守恒量。证明如下：

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\times\mathbf{l}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t}$$

注意式(9.3.2)及式(9.3.6)，上式成为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)&=-\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{l}\\&=-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

利用矢量乘积公式

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \tag{9.3.8}$$

上式可改写成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{GMm}{r^2}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{GMm}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{GMm}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{r} + \frac{GMm}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\right)
\end{aligned} \tag{9.3.9}
$$

在上述推导中已经利用了下式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}i} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 \\
&= r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

由式(9.3.9)立即得到

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l} - GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0
$$

即

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9.3.10}
$$

这就证明了 $\mathbf{B}$ 的确是一个守恒量。

利用这个守恒量很容易证明开普勒第一定律，即行星的轨迹是一椭圆形，太阳在其焦点上。

由

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\cdot\mathbf{l}^2 &= \frac{1}{m}\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} \\
&= \left(\mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\mathbf{l}
\end{aligned}
$$

注意矢量乘法规则

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\&=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\end{aligned} \tag{9.3.11}$$

上式可改写成为

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\mathbf{l}^2&=\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)\\&=\mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{B}+\frac{GMm}{r}\mathbf{r}\right)\end{aligned} \tag{9.3.12}$$

由于 $\mathbf{B}$ 是不变的矢量，故可以选为一坐标轴方向，这样就有

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}=rB\cos\varphi$$

其中 φ 为 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{B}$ 之间的夹角。用这个表达式，则式(9.3.12)可变成

$$\frac{1}{m}\mathbf{l}^2=rB\cos\varphi+GMmr$$

或者

$$r=\frac{\mathbf{l}/GMm^2}{1+\dfrac{B}{GMm}\cos\varphi} \tag{9.3.13}$$

这就是行星运动的轨迹。

式(9.3.13)是典型的极坐标中的圆锥曲线方程。根据图9.7，我们来回忆一下有关圆锥曲线的基本性质。图中 B 沿极轴方向，φ 角为从极轴计起的方位角。以 O 为焦点的圆锥曲线的标准形式是

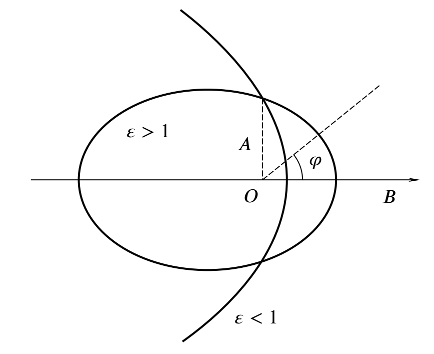


图 9.7　圆锥曲线的基本性质

$$r=\frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{9.3.14}$$

其中 A 为 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时的 r 值，称为截距；ε 称为偏心率。依照偏心率的不同，曲线(9.3.14)可分成以下几种形式：

当 $\varepsilon<1$ 时，为椭圆；

当 $\varepsilon>1$ 时，为双曲线；

当 $\varepsilon=1$ 时，为抛物线；

当 $\varepsilon=0$ 时，为圆。

这样，我们就证明了在太阳引力作用下，行星轨迹必定是圆锥曲线，而且太阳在其焦点上。

进一步比较式(9.3.13)与式(9.3.14)还可以求得轨迹的偏心率

$$\varepsilon=\frac{B}{GMm} \tag{9.3.15}$$

根据 $\mathbf{B}$ 的定义式(9.3.7)，$\mathbf{B}$ 的大小可以按下面的方法求出：

$$\begin{aligned}
B^2 &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}-GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}-GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)\\
&\quad -2GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)+(GMm)^2
\end{aligned}$$

利用公式(9.3.8)及式(9.3.11)，上式能化简成为

$$\begin{aligned}
B^2 &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right]\cdot\mathbf{l}\\
&\quad -2GMm\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{l}\right)+(GMm)^2\\
&= \frac{2}{m}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{GMm}{r}\right]l^2+(GMm)^2
\end{aligned}$$

再由能量守恒公式(9.3.3)、(9.3.4)、(9.3.5)，上式可表示为

$$B^2 = \frac{2}{m}El^2 + G^2M^2m^2 \tag{9.3.16}$$

代入式(9.3.15)即得

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{B}{GMm} \\ &= \left(1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{9.3.17}$$

总之，隆格-楞茨矢量 **B** 的物理意义是：

(1) 其方向指向行星轨道最靠近太阳的点，常简称指向近日点

(2) 它的大小决定轨道的偏心率。

由式(9.3.17)可以看到，只有当 $E < 0$ 时，轨迹才可能是椭圆(即 $\varepsilon < 1$)，因此，行星的机械能（按式(9.3.3)所给定的数）必定小于零；当 $E > 0$ 时，$\varepsilon > 1$，运动轨迹是双曲线，它不是周期性的运动，而是从无限远来再到无限远去的运动。

圆轨道的条件是 $\varepsilon = 0$，即应有

$$1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3} = 0 \tag{9.3.18}$$

这个结果说明，对于圆运动，行星的机械能与其角动量 l 之间具有确定的关系，相互不是独立的。实际上式(9.3.18)可由能量守恒式(9.3.3)和角动量守恒式(9.3.6)直接得到。因为在圆运动情况

$$l = mrv$$

以及

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

将上两式代入能量守恒公式

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E$$

即可得到式(9.3.18)。

【例 2】 一个质量为 m 的宇宙飞船，环绕一个行星作圆轨道运动，轨道半径为 R_0，飞船速率为 v_0。突然点燃一个火箭，使飞船增加了向外的径向速度分量 v_r(设 $v_r < v_0$)，因此飞船的轨道变成椭圆形。

(1) 用 R_0, v_0 表示出引力 F 的表达式；

(2) 用 R_0, v_0, v_r 表示出新轨道方程，并画出 $v_r = \dfrac{1}{2}v_0$ 时的轨道草图；

(3) 求新轨道的半长轴 a，并证明，对于原来的圆轨道和新的椭圆轨道，Ea 是相同的 (E 为总能量)。

解 (1) 对于圆轨道，有

$$\frac{GMm}{R_0^2} = m\frac{v_0^2}{R_0}$$

即

$$GMm = mv_0^2 R_0 = C$$

故

$$|F| = \frac{mv_0^2 R_0}{r^2}$$

式中 r 是在此引力场内某点与力心的距离。

(2) 火箭点燃，角动量不变

$$l = mv_0 R_0$$

是守恒量。而新能量值为

$$\begin{aligned} E' &= E_K + E_P \\ &= \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_r^2\right) - \frac{GMm}{R_0} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 - mv_0^2 \\ &= -\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 \end{aligned}$$

根据式(9.3.17)新的偏心率为

$$\varepsilon' = \left(1 + \frac{2E'l^2}{mC^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - 1 + \frac{v_r^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{v_r}{v_0}$$

新的参量 A' 为

$$A' = \frac{l^2}{mC}$$

$$= \frac{m^2 v_0^2 R_0^2}{m m v_0^2 R_0}$$

$$= R_0$$

故得新的轨道方程

$$r = \frac{R_0}{1 + \varepsilon' \cos\varphi}$$

$$= \frac{R_0}{1 + \dfrac{v_r}{v_0}\cos\varphi}$$

当 $v_r = \dfrac{1}{2}v_0$ 时，轨道方程为

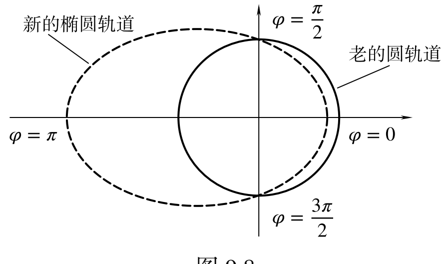


图 9.8

$$r = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$$

此时轨道的草图如图9.8所示。

(3) 长轴 $2a = r(\varphi = 0) + r(\varphi = \pi)$

$$2a = \frac{R_0}{1+\varepsilon'} + \frac{R_0}{1-\varepsilon'}$$
$$= \frac{2R_0}{1-\varepsilon'^2}$$
$$= \frac{2R_0}{1-\left(\frac{v_r}{v_0}\right)^2}$$

对于

$$v_r = \frac{1}{2}v_0$$
$$a = \frac{4}{3}R_0$$

对于新轨道，

$$E'a = \left(-\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_r^2\right)\frac{R_0}{1-\left(\frac{v_r}{v_0}\right)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}mv_0^2R_0$$

对于老轨道，

$$Ea = ER_0$$
$$= -\frac{1}{2}mv_0^2R_0$$

两者相同，因此得证。

【例 3】 宇宙飞船绕一行星作圆轨道飞行，轨道半径为 R_0，

飞行速率为 v_0。船长想把轨道改变为经过 $\boldsymbol{B}$ 点的椭圆形，$\boldsymbol{B}$ 点距行星中心为 $3\boldsymbol{R}_0$，如图9.9所示。

(1) 写出椭圆的轨道方程。为了使飞船进入这个轨道，飞船在 A 点的速率必须增为多少？

图 9.9

(2) 从 A 到 B 的航行，要多少时间？

(3) 求飞船在 C 点的速度沿椭圆长轴的速度分量 $v_\perp$ 和 $\dot{r}$。

解 (1) 由圆轨道，有

$$GMm = mv_0^2R_0$$
$$= C$$

所期望的轨道是

$$r_{\min} = \frac{A}{1+\varepsilon} = R_0$$
$$r_{\max} = \frac{A}{1-\varepsilon} = 3R_0$$

求解得到

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$A = \frac{3}{2}R_0$$

故轨道方程为

$$r = \frac{\frac{3}{2}R_0}{1+\frac{1}{2}\cos\varphi}$$

根据 A, ε 的定义〔式(9.3.13)及式(9.3.17)〕，再由长轴的定义，有

$$\begin{aligned}2a &= 4R_0 \\ &= \frac{2A}{1-\varepsilon^2} \\ &= \frac{\dfrac{2l^2}{mG}}{1-\left(1+\dfrac{2E'l^2}{mC^2}\right)} \\ &= -\frac{C^2}{E'}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}E' &= -\frac{C^2}{4R_0} \\ &= -\frac{mv_0^2R_0}{4R_0} \\ &= -\frac{1}{4}mv_0^2\end{aligned}$$

由 E' 的定义，在 A 点有

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{C}{R_0} \\ &= \frac{1}{2}mv_A^2 - mv_0^2\end{aligned}$$

由此得飞船在 A 点的速率增加为

$$v_A = \sqrt{\frac{3}{2}}v_0$$

(2) 利用开普勒定律〔式(9.2.5)〕有

$$\frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m}$$

周期之比为

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{A_2'}{A_1}\right)\left(\frac{l_1}{l_2}\right)\left(\frac{m}{m}\right)$$

已知

$$T_1=\frac{2\pi R_0}{v_0}$$

$$A_1'=\pi R_0^2$$

$$A_2'=\pi ab$$

$$=\pi\left(2R_0\right)\frac{\frac{3}{2}R_0}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=2\pi\sqrt{3}R_0^2$$

$$T_2=\frac{2\pi R_0}{v_0}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}R_0^2}{\pi R_0^2}\right)\left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{3}{2}}v_0}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{2}\pi R_0}{v_0}$$

故从 A 到 B 的时间为

$$T=\frac{1}{2}T_2$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pi R_0}{v_0}$$

(3) 爆发之后，在 A 点有

$$E'=-\frac{1}{4}mv_0^2$$

$$l'=l_2$$

$$=mv_AR_0$$

$$=m\sqrt{-\frac{3}{2}}v_0R_0$$

E' 和 l' 是不变的，在 C 点，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ，$r = \dfrac{3}{2}R_0$ ，故

$$\begin{aligned}
l' &= m\sqrt{\frac{3}{2}}v_0 R_0 \\
&= mv_\perp \left(\frac{3}{2}R_0\right) \\
E' &= -\frac{1}{4}mv_0^2 \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 - \frac{C}{\frac{3}{2}R_0} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 - \frac{mv_0^2 R_0}{\frac{3}{2}R_0}
\end{aligned}$$

解上两式得

$$\begin{aligned}
v_\perp &= \sqrt{\frac{2}{3}}v_0 \\
\dot{r} &= \sqrt{\frac{1}{6}}v_0
\end{aligned}$$

9.4 转 动 惯 量

我们已经知道，质点的角动量为 $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ，它遵循的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{9.4.1}$$

如果质点在一个平面内运动，取此平面内某一点 O 为原点 (如图9.10所示)，则 $\mathbf{r}$，$\mathbf{p}$ 总是在此平面内，由定义知，总是垂直于此平面的，故 $\mathbf{M}$ 也只能总是垂直于此平面，否则的方向将变化，运动

就不可能是平面的。因此，在平面运动的情况〔式(9.4.1)〕可写为标量形式

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=M \tag{9.4.2}$$

再进一步简化，假定质点绕中心 O 作半径为 r 的圆周运动，则有 $l=mrv$，或者 $l=mr^2\omega$，这里 $\omega=v/r$ 为角速率。这样，式(9.4.2)可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\omega\right)=M$$

图 9.10　平面运动中的 r 及 p

由于 m，r 都是常数，所以

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M \tag{9.4.3}$$

式(9.4.3)是圆周运动的基本方程，它与一维运动中的质点的动力学基本方程 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F$ 很相似。这里，M 与 F 的地位相当；mr^2 与 m 的地位相当。我们知道质量 m 是惯性的度量，在同样力 F 的作用下，质量 m 越大，越不易于加速。mr^2 也有类似性质，在同样的力矩 M 作用下，mr^2 越大，角加速度越小。mr^2 是关于转动运动的惯性的度量，我们称它为质点的转动惯量。

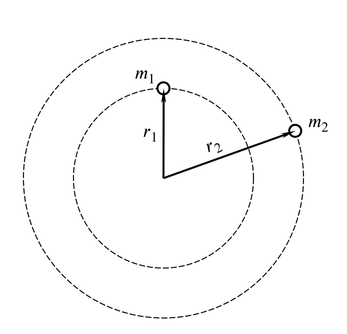


图 9.11　两质点的圆周运动

下面我们把转动惯量的概念作些推广。首先讨论由质量为 m_1，m_2 的两个质点构成的体系，它们在同一平面内绕同一中心作半径分别为 r_1，r_2 的圆周运动 (图 9.11) 。它们的运动方程是：

$$\text{对}m_1\text{有}\quad m_1 r_1^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_1 \tag{9.4.4}$$

$$\text{对}m_2\text{有}\quad m_2 r_2^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_2 \tag{9.4.5}$$

式中 $\boldsymbol{M}_1$ 、$\boldsymbol{M}_2$ 分别是质点 m_1 及 m_2 所受到的总力矩，既应包括外界物体作用在体系中质点上的力矩，也应包括体系内质点间相互作用的力矩。前者称为外力矩，后者称为内力矩将式(9.4.4)和式(9.4.5)相加，得

$$m_1 r_1^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + m_2 r_2^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$$

在牛顿第三定律成立的条件下，体系的内力矩相互抵消，总和应为零，所以上式可写为

$$m_1 r_1^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + m_2 r_2^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\text{外}} \tag{9.4.6}$$

式中 $\boldsymbol{M}_{\text{外}}$ 外是体系受到的总外力矩。

用类似的方法，可以把上述结果推广到多质点所构成的体系，即有 n 个质点都绕 O 作圆周运动，则有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\text{外}} \tag{9.4.7}$$

其中下标 $i = 1, 2, \ldots, n$，指第 i 个质点的相应量。

上述体系中各质点的角速度可以不相同。在特殊情况下，体系中各质点的角速度可能都相同。譬如一根棒子绕端点在一平面内转动 (图9.12)，我们可以把棒看成许多质点的集合，各质点的角速度相同，即

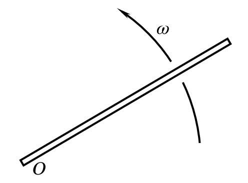


图 9.12　棒的转动

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = \omega \tag{9.4.8}$$

我们把体系中各质点角速质不相等的情况，称为较差转动体系反之，称为刚性转动体系。对于较差转动，式(9.4.7)没有多少用处，因为在一个方程中含有 n 个变量，无法求解。要想求解，仍必须回到 n 个方程去。但对刚性转动，由式(9.4.8)可将式(9.4.7)简化为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{外}$$

与式(9.4.3)对比，我们定义

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{9.4.9}$$

称为刚性转动体系的对某一选定的转轴的转动惯量。这样，上述方程就改写为

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{9.4.10}$$

式(9.4.10)是刚性转动体系的动力学基本方程式，在不致引起误解的情况下，我们可将 $\boldsymbol{M}_{外}$ 的下标去掉。

要强调指出：转动惯量与质量虽然都反映物体的惯性性质，但二者有许多不同点。在牛顿力学中，质点的质量是不变的，对任何运动都取该值；而转动惯量则取决于转动轴的位置，脱离确定的转动轴，一般地谈论转动惯量是无意义的。

作为一个例子，我们求地球对自转轴的转动惯量。这里已经不是平面问题，但我们可以把地球分成许多垂直于自转轴的薄层，每一层仍是平面问题，然后选加在一起，就是整个地球对自转轴的转动惯量。

为计算方便，假定地球的质量密度是均匀的，其值为 ρ。我们采用球极坐标 (图9.13)，则位于 (r,θ,φ) 的体积元为

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

这个体积元中的质量为

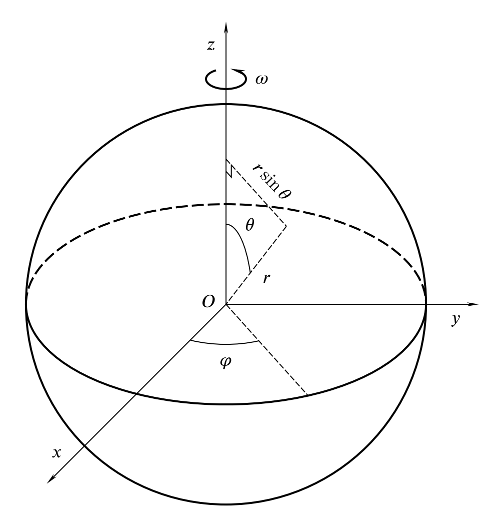


图 9.13　求地球的转动惯量

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$$
$$= \rho r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

这个体积元到转轴的距离为 $r\sin\theta$，根据定义，它对自转轴的转动惯量为 $\mathrm{d}I = r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}m$，所以整个地球对自转轴的转动惯量可由下列积分求出：

$$I = \int r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}m$$
$$= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{8\pi}{15}\rho R^5$$
$$= \frac{2}{5}M_E R^2$$

其中 R 为地球半径；$M_E = \dfrac{4\pi}{3}R^3\rho$ 是地球的质量。将 $M_E \approx 6\times10^{27}$

克，$R \approx 6 \times 10^3$ 公里代入，即求得

$$I_{地} = 8 \times 10^{40} \text{ 克}\cdot\text{米}^2$$
$$= 8 \times 10^{37} \text{ 公斤}\cdot\text{米}^2$$

9.5 转动动能

一个质点绕固定轴的平面运动，遵从方程式(9.4.2)，即

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = M \tag{9.5.1}$$

当质点与轴的距离 r 固定时，当然仍有 $l = mrv$。另外，这时我们仍可定义角速率 ω 为

$$\omega = \frac{v}{r}$$

所以，仍然有

$$l = I\omega$$

其中 $I = mr^2$ 是在质点距轴为 r 时的转动惯量。方程(9.5.1)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = M \tag{9.5.2}$$

对于多质点体系的绕轴运动，若每个质点与轴的距离可以变化，但各质点的角速率相同，则方程(9.5.2)同样正确，转动惯量仍由式(9.4.9)定义。由于在这种情况下 I 不是常数，所以方程(9.5.2)不能写成式(9.4.10)的形式。

如果外力矩 $M = 0$，则由方程(9.5.2)得到

$$I\omega = \text{不变量} \tag{9.5.3}$$

这个守恒律并不是新的，式(9.5.3)就是角动量守恒律在绕轴的平面运动特殊情况下的表示。由于 I 是可以变化的，所以我们可以用改变 I 的办法来改变转动速率 ω。当 I 大时 ω 小；当 I 小时 ω 大。

用 ω 乘式(9.5.3)两边，得到

$$\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = M\omega$$

如果 I 不随时间变化，上式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = M\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

式中 φ 是质点绕轴转过的角度。上式再乘以 $\mathrm{d}t$，然后积分，得

$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)_2 - \left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)_1 = \int_1^2 M\,\mathrm{d}\varphi \tag{9.5.4}$$

式(9.5.4)非常类似于动能和力的下列关系式

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_2 - \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_1 = \int_1^2 F\,\mathrm{d}x$$

对比二者可见，力矩与力相对应，角位移与位移相对应，转动惯量 I 与质量 m 相对应，角速率 φ 与速率 v 相对应。由此，$\frac{1}{2}I\omega^2$ 与动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 相对应，我们称前者为转动动能。表面看来，定轴转动要比一维直线运动复杂得多，但我们看到两者所满足的方程，以及一些有关的结论都存在着一一对应。这种现象，在物理学中常常遇到，也就是说，在不同的物理现象之间存在着内在的一致性。

思　考　题

1. 枪筒内来福线的作用是什么？

2. 月球绕地球的公转周期与月球的自转周期是一样的，因此月球始终以固定的一面对着地球。这是凑巧的偶然还是有其必然性？

3. 设某体系受一有心力，是否对任意选定的原点，此体系的角动量都是守恒量?

4. 我们对圆锥曲线的描写，采用式(9.3.14)。若改用下式

$$r=\frac{A}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

有什么差别? 使用时要注意什么?

习　　题

1. 分别对质心 C 及对任一固定点 O 写出下述两个体系的角动量 $\mathbf{L}_c$ 及 $\mathbf{L}_o$。

(1) 质量为 m 的两个小球，用轻的细棍连接，棍长为 $2l$，以角速度 ω 绕 C 旋转，O 点与 C 相距为 r。

(2) 细圆环质量为 m，以角速度 ω 围绕 C 旋转，环半径为 R；O 点与 C 相距为 r。

2. 有一质点组，质心为 C 点，O 为某一固定点，如图 914 所示。求证

$$\mathbf{L}_o=\mathbf{L}_c+\mathbf{r}_c\times\mathbf{p}_c$$

其中，$\mathbf{L}_o$ 为质点组对 O 的角动量；$\mathbf{L}_c$ 为质点组对质心 C 的角动量；$\mathbf{r}_c$ 为质心对 O 的矢径，$\mathbf{p}_c$ 为质心对 O 的动量。

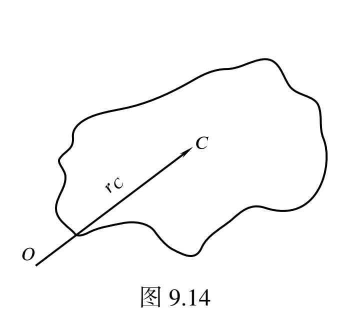


图 9.14

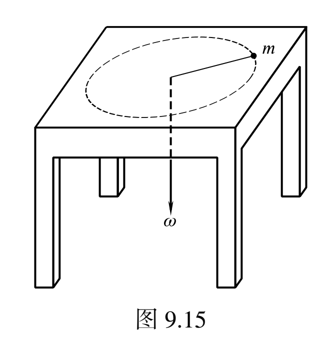


图 9.15

3. 一质量为 m 的物体，绕一穿过光滑桌面上极小的圆孔的细绳旋转 (图9.15)。开始时物体到中心的距离为 r_0 ，旋转角速度为 ω_0。若在 $t=0$ 时，开始以固定的速度 v 拉绳子，于是物体到中心的距离不断减小。求

(1) $\omega(t)$ ；

(2) 拉绳子的力 $\boldsymbol{F}$。

4. 两个滑冰运动员，体重都是 60 公斤，在两条相距 10 米的平直跑道上以 6.5 米/秒的速率相向地匀速滑行。当他们之间的距离恰好等于 10 米时，他们分别抓住一根 10 米长的绳子的两端。若将每个运动员看成一个质点，绳子质量略去不计。

(1) 求他们抓住绳子前后相对于绳子中点的角动量。

(2) 他们每人都用力往自己一边拉绳子，当他们之间距离为 5.0 米时，各自的速率是多少?

(3) 计算每个运动员在减小他们之间距离时所做的功，并证明这个功恰好等于他们动能的变化。

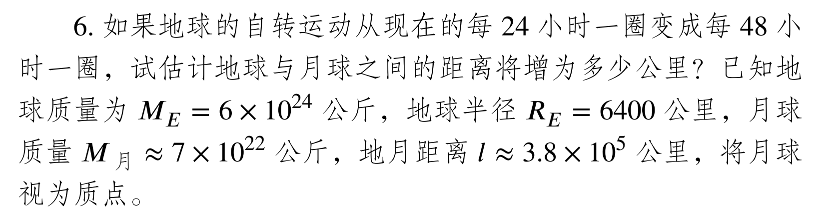
(4) 求两人相距为 5.0 米时，绳中之张力 $\boldsymbol{T}$。

5. 两根均匀细杆，质量都是 m，长度都是 l，都以速率 v 在垂直于长度方向平动，方向相反，如图 9.15所示。当它们相遇时，相邻两端恰好相碰，而且粘接在一起形成一根长为 $2l$ 的直杆。

(1) 问碰撞后它们怎么运动?

(2) 求碰撞后的角速度 ω。

图 9.16



6. 如果地球的自转运动从现在的每 24 小时一圈变成每 48 小时一圈，试估计地球与月球之间的距离将增为多少公里? 已知地球质量为 $M_E=6\times10^{24}$ 公斤，地球半径 $R_E=6400$ 公里，月球质量 $M_{月}\approx7\times10^{22}$ 公斤，地月距离 $l\approx3.8\times10^{5}$ 公里，将月球视为质点。

7. 一个宇宙飞船环绕一行星作圆轨道运动，轨道半径为 R_0，飞船速率为 v_0，突然点燃火箭，使飞船的速度从 v_0 变为 βv_0，加速度方向与速度方向同。

(1) 求出用 R_0, β 表示的新的轨道方程。证明当 $\beta < \sqrt{2}$ 时，轨道是椭圆，总能为负；当 $\beta > \sqrt{2}$ 时，轨道为双曲线，总能为正。

(2) 在轨道为双曲线时，求出角度 α 的表达式 (用 β 表示 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$)，α 为火箭点火时飞船速度方向与飞船逃逸时速度方向之间的夹角；求出 $\beta = \sqrt{3}$ 时的 α 值。(提示：飞船逃逸时速度方向是指飞船离行星为无穷远时的速度方向。)

8. 一个彗星在抛物线轨道上运行，此抛物线与地球的公转轨道相交，两个交点在地球轨道直径的两端 (设地球公转轨道为圆)。

(1) 若地球公转轨道的半径为 R_0，地球公转速率为 v_0，写出彗星的轨道方程。证明它的最大速率为 $2v_0$。

(2) 用开普勒第二定律证明彗星在地球轨道内的时间为 $\dfrac{2}{3}\pi$ 年。

9. 已知地球半径 $R = 6.4 \times 10^3$ 公里，密度为 $\rho = 5.5$ 克/厘米^3，若地球为规则的球形，求地球自转的角动量。

10. 在静止的、均匀的、质量为 M、半径为 R_1 的水平大圆盘上，站着一个质量为 m 的人，圆盘可以无擦地绕通过圆盘中心的竖直轴转动。当这个人开始顺着与圆盘周心、半径为 $R_2(R_2 < R_1)$ 的圆周等速率地走动时，若他相对于圆盘的速度为 v，问圆盘将以多大的角速度 ω 旋转？

11. 在绕几何轴自由地旋转着的水平圆盘边上，站着一个质量为 m 的人。圆盘的半径为 R，转动惯量为 I，角速率为 $\omega = n$ 转/分。若这人由盘边走到盘的中心，求圆盘角速度的变化和这个系统的能量变化。

12. 如图9.17，质量为 m、边长为 a 的均匀正方形薄板，可以绕着竖直轴 OO'，自由地转动。当它静止时，有一质量为 m 的小

球以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿水平方向垂直于板面撞在板的边上 $\boldsymbol{A}$ 点。

(1) 设碰撞是完全弹性的，碰撞后板和小球将如何运动?

(2) 设碰撞是完全非弹性的，问小球与板共同的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为多少?

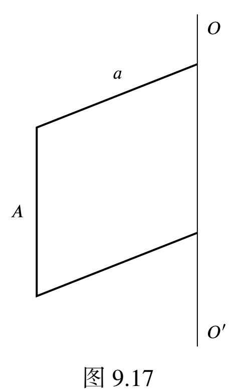


图 9.17

13. 由于月—地之间有潮汐力，月亮会不断升高。当月—地相距大致为多远时，月亮将会飞掉，不再随着地球公转了?

第十章

刚　　体

10.1　自由度及刚体的自由度

自由度就是描写体系几何位形所需的独立坐标的数目。譬如，对于一个质点的直线运动，只需一个坐标 x 就完全确定了质点的位置；对于一个质点的圆周运动，只需一个坐标 φ 来确定质点的位置 (图10.1)。因此，这类运动的自由度是 1。一般地说，质点的一维运动其自由度都是 1。对于一个质点在三维空间中的运动，需要三个独立坐标来描写它的位置。可以用笛卡尔坐标 x, y, z 也可以用球极坐标 r, θ, φ。因此，质点是具有 3 个自由度的物理对象。

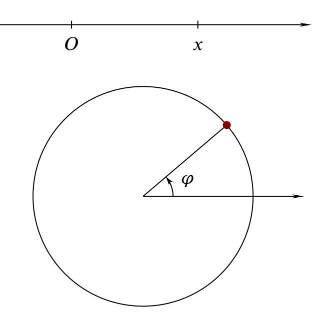


图 10.1　一维运动

推广到由 n 个质点构成的多质点体系，一般说，如果要确定体系的几何位形，就要 $3\times n$ 个坐标，即有 $3n$ 个自由度。然而，在某些情况下，由于质点之间存在确定的关系，故这 $3n$ 个坐标并不全是独立的。换言之，在质点体系中常存在着一些限制各质点自由运动的条件。

例如，由两个质点 m_1, m_2 构成的体系 (图10.2)，一般要用 6 个坐标 $\left(x_1, y_1, z_1\right), \left(x_2, y_2, z_2\right)$ 如果两质点之间的距离是固定的，其

长度为 r，则上述 6 个坐标之间有一个代数关系：

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 \qquad (10.1.1)$$

亦即只要知道了任何 5 个坐标值，由上式就完全确定了第 6 个坐标的值。因此，独立坐标的数目是 $6 - 1 = 5$，此体系的自由度为 5。这种体系在自然界是有的，如氢分子，它是由两个氢原子构成的，两原子间的距离基本上可以认为是不变的。

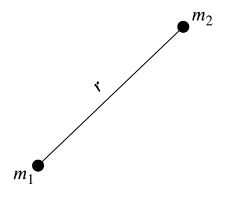


图 10.2　两质点体系

再如，两个氢原子和一个氧原子组成的体系。若三个原子是完全自由的运动，则有 9 个自由度。如果化合成水分子，两两之间的距离不变，形成三角形 (图10.3)，则描写三个原子位置的 9 个坐标应满足 3 个类似于式(10.1.1)的代数关系。所以此时该体系的独立坐标个数为 $9 - 3 = 6$ ，即有 6 个自由度。

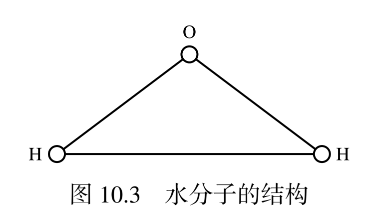


图 10.3　水分子的结构

由四个原子组成的分子，例如 NH_3，在化合之前，有 $3\times4 = 12$ 个自由度，化合成氨分子之后，形成如图10.4的四面体，两两原子之间的距离都不变，共有 6 个代数关系，所以这体系的自由度为 $12 - 6 = 6$。

如果再增加一个原子，且它与原来四个原子的距离也都不变(图10.5)，则增加一个原子，就要增加 3 个坐标，但同时却增加了 4 个代数关系式。要注意，新增加的 4 个代数关系式并不是完全独立的。因为在这 4 个关系式中，任何 3 个确定之后，第 4 个也就确定了。故仅有 3 个新的独立代数关系式。因此，整个体系的自由度不变仍然是 6。

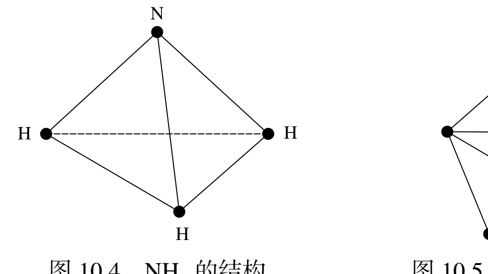
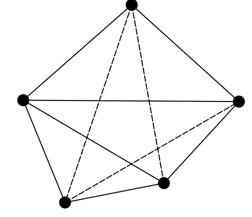



图 10.4　NH_3 的结构


图 10.5　五原子构成的体系

同理，我们可以推广到更多原子组成的分子，得到一个结论：含有三个原子以上的分子，若原子不全处在一条直线上，则都有 6 个自由度。

把上述论断再作推广可以得到：由任意多个质点所构成的体系，如果体系中所有质点之间的距离都是固定的，且不在一条直线上，则体系的自由度必定是 6。这种多质点体系称为刚体。当然，刚体的概念最早并不是从分子来的，而是来自于不变形的体系。所谓不变形即组成体系的各质点之间相对位置在运动过程中不发生变化。这种体系称为刚体，实际上，自然界中没有绝对的刚体。刚体这一概念是一种理想化。只要可以忽略物体形变的影响，则该物体就可以认为是刚体。

10.2　平动和转动

上节中，我们论证了刚体具有 6 个自由度，即描写刚体的几何位形需要 6 个独立坐标。另一方面，选取哪 6 个坐标是完全任意的。选取什么样的坐标能使我们对刚体的描写更方便呢？为此，我们来研究刚体运动的特征。

刚体的一种最简单的运动形式是平动。在平动中，刚体中任

何两点之间的连线的方向总是保持不变；刚体中各点都具有同样的速度，并且运动轨迹的形状也都相同 (图10.6) 。

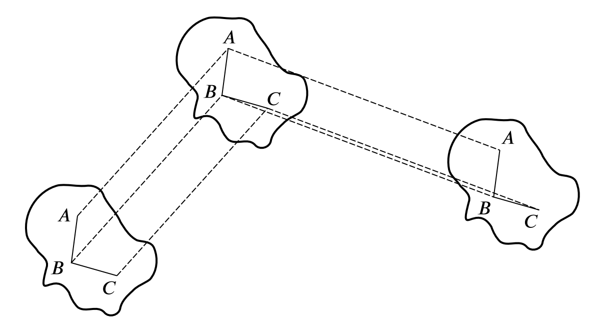


图 10.6　刚体的平动

刚体的另一种最简单的运动形式是绕固定轴的转动。在转动时，刚体中各点的轨迹都是在垂直于转动轴的平面内的圆 (10.7)。

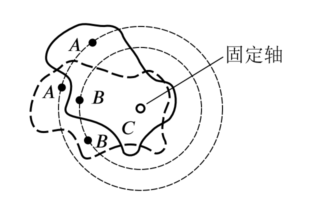
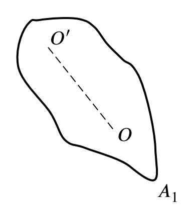


图 10.7　刚体绕固定轴的转动

下面我们来证明一个重要的论断：刚体的任何运动都可以归结为平动和转动的迭加。举例说，如图 108 所示的物体从位置 A_1 移到位置 A_2 。这个运动可以按下述方式加以分解。设刚体先从 A_1 平动到 A'，这时刚体上的 O 点已经移到终点位置。然后再将刚体绕点 O 转动角 $\Delta\varphi$，则刚体就完全移到了终点位置 A_2。

上述分解表明，从 A_1 到 A_2 的运动，可以视为从 A_1 到 A' 的平动及从 A' 到 A_2 的转动的迭加。显然，在进行上述分解时，对点 O 的选取是任意的。我们可以让刚体先从 A_1 平动到 A'' 的位置，这时另一点 O' 已经移到终位置，然后再将刚体绕 O' 转动而达到位置 A_2。因此，从 A_1 到 A_2 的运动，可以按多种不同的方式加以分解，即分解成平动和转动的迭加的方式不是唯一的。但重



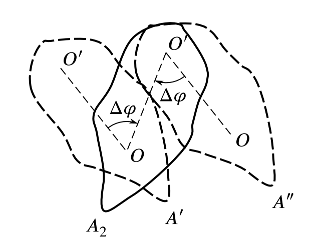


图 10.8 刚体运动的分解

要的是：在不同的分解方式中转动的角度是一样的，A' 到 A_2 的转角与 A'' 到 A_2 的转角都等于 $\Delta\varphi$，且方向也一样，都是顺时针转动；而相应的平动路程是不一样的，A 到 A'' 的路程与 A 到 A'' 的路程是不相同的。

现在举例分析一下车轮在地面上沿直线的滚动，如图 109 所示。现在平动是一维的，转动轴的方向也是确定的，故转动也是一维的，所以仅需要两个独立坐标就可描写车轮的滚动问题。所谓纯滚动，是车轮前进的 Δx 就等于车轮滚过的弧长 $\widehat{\Delta s}$(图10.9)即

$$\Delta x = \widehat{\Delta s}$$

又 $$\widehat{\Delta s} = r_0 \Delta\varphi$$

所以 $$\Delta x = r_0 \Delta\varphi$$

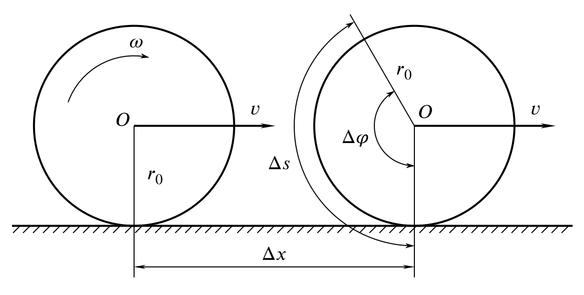


图 10.9 车轮的滚动

不难断定，在滚动中只有车轮中心 O 的运动轨迹是直线，其他各点的轨迹都是曲线，即所谓旋转轮线。我们选 O 作为基点，如果车轮在 Δt 时间内位移为 Δx，则 O 点的速度为

$$\begin{aligned} v_0 &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= r_0\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \\ &= r_0\omega \end{aligned}$$

这就是车轮的平动速度。现在，车轮的运动分解为以 O 点为基点的平动，其速度为 v_0 以及绕 O 的转动，其角速度为 0。车轮上任何一点的速度都是这两种运动速度的合成。

我们来求车轮的垂直于地面的直径上各点的速度。高于 O 点的各点，平动速度方向与转动速度方向一致。所以合速度为

$$v = v_0 + r\omega \tag{10.2.1}$$

其中 r 是该点与 O 的距离，对低于 O 的各点，转动速度方向与平动速度方向相反，所以合速度为

$$v = v_0 - r\omega \tag{10.2.2}$$

图10.10 中，根据式(10.2.1)及式(10.2.1)画出了垂直于地面的直径上各点的合速度。车轮的最高点速度最大，比车轮中心速度高一倍。车轮与地面接触处速度为零。也就是说，在纯滚动的运动中，车轮与地面相接触处，总是相对静止的。

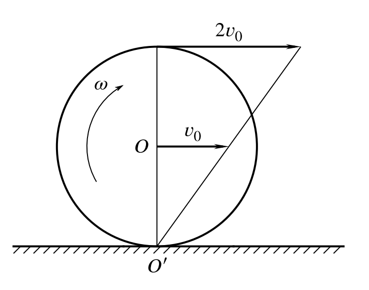


图 10.10　车轮各点的速度

我们知道一物体在另一物体表面滑动时，总有摩擦力，要克服摩擦力作功就导致损耗能量。对于纯滚动，接触处相对静止，是静摩擦力一个力作功的功率为 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$，现在接触处速度为零，所以

此时摩擦力不作功。这就是绝大多数交通工具都采用滚动而不采用滑动的原因。

图10.10 还告诉我们，也可以将车轮在该瞬时的运动看成是绕 O' 点 (车轮与地面接触点) 的转动，即过 O 点作垂直于车轮平面的转动轴，绕这个轴的角速度同样为 ω。对于过 O 点或 O' 点的轴来说，刚体的角速度都相同，这个性质可以称为角速度的绝对性。

这个结果具有普遍性。一般来说，刚体的任何运动都可以分解为平动及转动。选定刚体上某点 O 作为基点，刚体的平动就是整个刚体跟随基点 O 的运动，刚体的转动就是围绕通过 O 点的轴的运动。这时，刚体的平动速度依赖于对基点 O 的选择。选择不同的基点，平动速度就不同；而转动角速度则与基点的选择无关，不管选择在刚体上任何一点 O，角速度矢量的方向及大小都不变在这个意义上，我们说刚体的角速度具有绝对性。

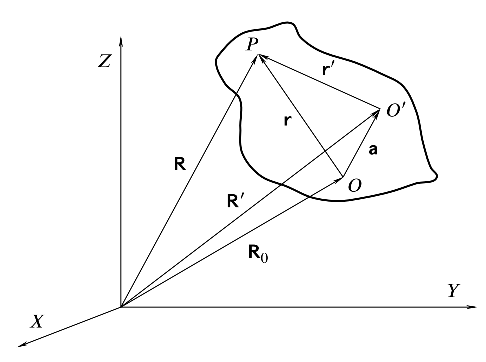


图 10.11 刚体的角速度的绝对性

现在我们来证明上述的论断。图10.11表示一个刚体相对于坐标系 K 的位形，O 及 P 是刚体上的两点。它们的位置矢量分别是 $\mathbf{R}_0$ 及 $\mathbf{R}$。显然，O 及 P 相对于 K 的速度分别为

$$\mathbf{V} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_0}{\mathrm{d}t} \quad 及 \quad \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} \tag{10.2.3}$$

另一方面，P 相对于 O 点的位置矢量为 $\mathbf{r}$，P 相对于 O 的速度为

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \tag{10.2.4}$$

若选择 O 为基点，则 P 相对于 O 的速度可以表示成

$$\mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{10.2.5}$$

其中 ω 是刚体绕过 O 点的轴的角速度。由速度合成的运动学，可知

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V} + \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

如果不选 O 作为基点，而选 O' 点，O' 点的坐标为 $\mathbf{R}'$，P 相对于 O' 点的位置矢量为 $\mathbf{r}'$，则类似于式(10.2.6)，可以推得

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{10.2.7}$$

其中 $\mathbf{V}' = \mathrm{d}\mathbf{R}'/\mathrm{d}t$，是 O' 相对于坐标系 K 的速度；$\boldsymbol{\omega}$ 是刚体绕过点 O' 的轴的角速度。

如果 O' 相对于 O 的位置矢量为 $\mathbf{a}$，则有

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \tag{10.2.8}$$

将上式代入式(10.2.6)，得到

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{10.2.9}$$

然而，$\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ 正是 O' 点相对于坐标系 K 的速度，即

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \tag{10.2.10}$$

由此，式(10.2.9)成为

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{10.2.11}$$

比较式(10.2.7)与式(10.2.11)，立即得到

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \tag{10.2.12}$$

这样，我们就证明了刚体的转动角速度的绝对性。

10.3 刚体的动能

刚体是由许多质点组成的。所以，刚体的动能就等于各质点的动能之和，即

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2 \tag{10.3.1}$$

上节中已经指出，刚体的运动总可以分解为随着某基点 O 的平动和绕该点的转动，而且基点是可以任意选取的。自然会问：动能〔式(10.3.1)〕是否也可分解成平动动能和转动动能呢？这是可以做到的。但对基点的选取有特殊的要求，即只有当选取刚体的质心 C 作为基点时，才可以进行这种分解。下面我们来证明这一点。

刚体中每个质点的速度可分解成平动部分及转动部分〔式(10.2.6)〕。如果我们取质心 C 作为基点，那么，平动部分的速度就是质心速度 $\mathbf{v}_c$，转动部分的速度就是质点相对于质心系的运动速度 $\mathbf{v}_i'$。根据速度合成，有

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_c+\mathbf{v}_i'$$

所以，式(10.3.1)可以改写为

$$\begin{aligned}T&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\mathbf{v}_c+\mathbf{v}_i'\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\mathbf{v}_c^2+\mathbf{v}_i^{2\prime}+2\mathbf{v}_c\cdot\mathbf{v}_i'\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_c^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i'^2+\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v}_c\end{aligned} \tag{10.3.2}$$

因为 $\mathbf{v}_i'=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i'}{\mathrm{d}t}$，$\mathbf{r}_i'$ 是第 i 个质点相对于质心的位置矢量，所以

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \mathbf{v}_i' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

按质心的定义，应有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

所以，式(10.3.2)中最后一项总为零，故有

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big)v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_n'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_n'^2 \end{aligned} \tag{10.3.3}$$

其中 $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ 是刚体的总质量。上式表示刚体的动能的确可以看成两部分的和，即以质心为基点的平动动能 $\frac{1}{2} - mv_c^2$ 及相对于质心的转动能

$$T_{转} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_n'^2 \tag{10.3.4}$$

如果转动角速度为 ω，则

$$v' = r_i \omega \tag{10.3.5}$$

其中 r_i 是第 i 个质点与转动轴的距离。将式(10.3.5)代入式(10.3.5)，得到

$$\begin{aligned} T_{转} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\Big)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I_c \omega^2 \end{aligned} \tag{10.3.6}$$

其中

$$I_c = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{10.3.7}$$

按式(9.4.9)，它就是该刚体相对于转动为 ω 的轴的转动惯量。由式(10.3.4)、(10.3.6)，刚体动能〔式(10.3.3)〕可以写成

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2 \tag{10.3.8}$$

这就是刚体动能的最终表达式。应当再强调一遍，只有选择质心作为分解平动及转动的基点时，式(10.3.8)才是适用的。

现在，我们从动能角度再来讨论一下上节中的车轮纯滚动例子。我们已经强调了取质心作为基点对于描写刚体的动能有很大的优越性。这时刚体动能由(10.3.8)表示。但原则上说，为描写刚体动能，基点总是可以任意选取的。如果我们取车轮与地面的接触点 A 为基点，则各质点相对地面的速度 $\mathbf{v}_i$ 可写为

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_A+\mathbf{v}_i'$$

式中 $\mathbf{v}_i'$ 是质点 m_i 相对于基点 A 的速度；$\mathbf{v}_A$ 是基点 A 相对于地面的速度。上节已证明车轮与地面接触处相对地面的速度为零，即 $v_A=0$，所以

$$\begin{aligned}
T&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i'^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i'^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_ir_{Ai}^2\omega_A^2\\
&=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}m_ir_{Ai}^2\Big)\omega_A^2\\
&=\frac{1}{2}I'\omega_A^2
\end{aligned}$$

其中 r_{Ai} 是质点 m_i 到通过 A 的转轴的距离；I' 是车轮对通过 A 且垂直于轮面的轴的转动惯量；ω_A 是以 A 为基点的角速度。我们已经知道，刚体的角速度与基点的选取无关。故 $\omega_A = \omega$，所以

$$T = \frac{1}{2} I' \omega^2 \tag{10.3.9}$$

比较式(10.3.8)与式(10.3.9)，得

$$\frac{1}{2} I' \omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

又

$$v_c = r_0 \omega$$

故

$$I' = m r_0^2 + I_c \tag{10.3.10}$$

式(10.3.10)表明，车轮绕过 A 点的轴的转动惯量 I' 与绕过质心的、与之平行的轴的转动惯量 I_c 之间有一个简单关系式。可以证明，上述关系是普遍成立的，即对于任何刚体，绕任意转轴的转动惯量，式(10.3.10)都成立，其中 r_c 是质心与该转轴之间的距离。

10.4 刚体的运动方程

在第八章中，我们已经证明，对于任一质点系，其质心运动都应满足下列方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_c}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} \tag{10.4.1}$$

当然，刚体也不例外。这时，式中 m 是刚体质量，$\mathbf{r}_c$ 是刚体的质心位置，$\mathbf{F}$ 是刚体所受到的总外力。

在第九章中，我们已经证明，对一个质点，它的角动量 $\mathbf{l}$ 满足下列的方程：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{10.4.2}$$

其中 $\mathbf{M}$ 是质点受到的力矩。对于刚体，我们可以定义它的角动量 $\mathbf{L}$ 等于各质点的角动量之和，即

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i \tag{10.4.3}$$

这样，由式(10.4.2)可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{10.4.4}$$

其中

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i \tag{10.4.5}$$

是刚体所受到的总外力矩。

方程(10.4.1)及方程(10.4.4)合在一起共有 6 个独立的方程。因为刚体只有 6 个自由度，所以可以推测到，方程(10.4.1)及方程(10.4.4)已经能够描写刚体的全部的动力学。因此，它们称为刚体的运动方程。

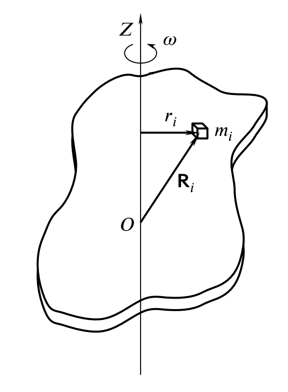


图 10.12 刚体围绕固定轴的转动

作为刚体运动方程的一个应用，我们来讨论刚体绕一固定轴的转动。如图 1012，一刚体只能绕 OZ 固定轴转动，其角速度为 ω。为了确定整个图 1012 刚体绕固定轴的转动刚体的角动量 $\mathbf{L}$，我们把刚体看成是由许多小块物质构成的。图 10.12 中第 i 小块对 O 点的角动量为

$$\mathbf{l}_i = m_i R_i \times \mathbf{v}_i$$

由于刚体只能绕 OZ 轴转动，所以，我们只对 $\mathbf{l}_i$ 在 OZ 轴方向上的分量有兴趣。这分量的大小是

$$m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

其中 r_i 是第 i 小块与轴 OZ 的距离 (1012)。在推导上式时，我们已经用了关系式 $v_i = r_i\omega$。这样，刚体角动量 $\mathbf{L}$ 沿 OZ 轴的分量就应等于

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega = I\omega \tag{10.4.6}$$

其中 I 是刚体对 OZ 轴的转动惯量。

由此得到，绕定轴转动的刚体的基本方程是

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z \tag{10.4.7}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = M_z \tag{10.4.8}$$

其中 M_z 是力矩 $\mathbf{M}$ 在 OZ 方向的分量。

如果作用在刚体上的外力矩在 OZ 轴方向的分量为零，则有

$$L_z = \text{不变量}$$

即转动运动保持不变，刚体依靠“惯性”而永远转动；如果刚体中物质的相对位置变化了，导致转动惯量从 I_1 变到 I_2，则角速率将从 ω_1 变到 ω_2，并且

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{10.4.9}$$

【例 1】 太阳绕自轴的旋转，其转速为每 22 天一周，若坍缩成中子星，试估计它的转速。

解 中子星中的物质可以简单地看成密排的中子，估计其密度 $\rho_n = \dfrac{m_p}{\frac{4\pi}{3}r_0^3} = \dfrac{1.67\times10^{-27}\text{ 公斤}}{\frac{4\pi}{3}\left(1.5\times10^{-15}\text{ 米}\right)^3} = 1.18\times10^{17}$ 公斤/米。已知太阳质量 $M_{日} = 1.989\times10^{30}$公斤，太阳半径 $R_{日} = 6.9599\times10^{8}$ 米，太阳若坍缩成中子星，则半径将变为 R。它满足下面的关系：

$$R'^3 = \frac{M_{日}}{\frac{4\pi}{3}\rho_n} = 4.024\times10^{12}\text{ 米}^3$$

所以

$$R' = 1.59\times10^{4}\text{ 米}$$

根据式(10.4.9)，得

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{I_1}{I_2}\omega_1 \\
&= \frac{\frac{2}{5}M_{日}R_{日}^2}{\frac{2}{5}M_{日}R'^2}\omega_1 \\
&= \left(\frac{R_{日}}{R'}\right)^2\omega_1 \\
&= \left(\frac{6.9599\times10^8}{1.59\times10^4}\right)^2\times\frac{2\pi}{22\times24\times60\times60} \\
&= 6.33\times10^8\ \text{弧度/秒}
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \left(\frac{R'}{R_{日}}\right)^2 T_1 \\
&= \left(\frac{1.59\times10^4}{6.9599\times10^8}\right)^2\times 22\ \text{天} \\
&= 1.15\times10^{-8}\ \text{天} \\
&\approx 0.99\ \text{毫秒}
\end{aligned}
$$

由此得，若太阳坍缩成中子星，其转速是 0.99 毫秒转一周。

下面我们讨论刚体运动中的外力作功的问题。为了表述简便，我们讨论转动轴线虽不固定，但其方向不变 (例如平行于 Z 轴) 的情况。根据功的定义，有

$$
A = T_2 - T_1
$$

如果取质心为基点，动能可写为平动动能与转动动能之和，则上式成为

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}mv_{c2}^2+\frac{1}{2}I_c\omega_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}mv_{c1}^2+\frac{1}{2}I_c\omega_1^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}mv_{c2}^2-\frac{1}{2}mv_{c1}^2\right)+\left(\frac{1}{2}I_c\omega_2^2-\frac{1}{2}I_c\omega_1^2\right)
\end{aligned}
$$

由式(10.4.1)易证

$$\frac{1}{2}mv_{c2}^2 - \frac{1}{2}mv_{c1}^2 = \int_{(1\to2)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_c$$

其中积分是沿着质心轨迹。又由式(10.4.8)，并注意 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$，则不难证明

$$\frac{1}{2}I_c\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_c\omega_1^2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\mathrm{d}\varphi$$

所以

$$A = \int_{(1\to2)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_c + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\mathrm{d}\varphi \tag{10.4.10}$$

式中右边第一项是外力引起平动动能增加而作的功；第二项是外力矩引起转动动能的增加而作的功。如果不取质心为基点，就不能分解为平动和转动两项，我们再次看到质心作为基点的优越性。

由于式(10.4.10)对于 $\mathbf{F}$ 及 M 是线性的，所以，当刚体受到多个外力的情况，第 i 个外力 $\mathbf{F}_i$ 及其力矩所作的功也类似可以写成为

$$A_i = \int_{(1\to2)} \mathbf{F}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_c + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_i\,\mathrm{d}\varphi \tag{10.4.11}$$

我们再次讨论车轮纯滚动问题，证明纯滚动过程中摩擦力并不作功。在图10.13 中，我们画出摩擦力 $\mathbf{F}$。由式(10.4.11)，摩擦力对刚体所作的功为

$$\begin{aligned}
A &= \int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int M\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int F\,\mathrm{d}x + \int \left(-Fr_0\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= F\Delta x + \left(-Fr_0\Delta\varphi\right) \\
&= F\left(\Delta x - r_0\Delta\varphi\right)
\end{aligned}$$

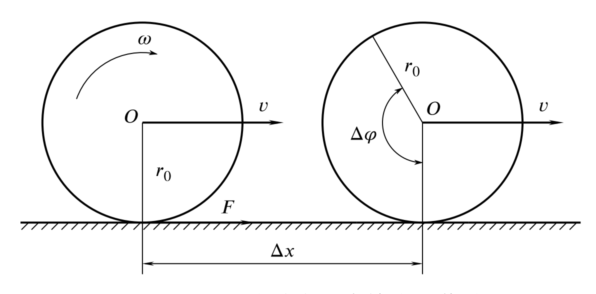


图 10.13　纯滚动中的摩擦力不作功

式中力矩 $M = Fr_0$ 取负号，是因为它使车轮绕质心的转动方向上增加的方向相反。又因是纯滚动，故有

$$\Delta x - r_0\Delta\varphi = 0$$

最后得到

$$A = 0$$

需要指出，尽管刚体问题纯粹是牛顿力学的问题，但与质点问题有很大的不同，它的基本运动方程是式(10.4.1)、(10.4.4)。又如所谓刚体处于平衡状态，是指其质心加速度为零，同时角动量不变的状态，因此刚体的平衡条件为

$$\begin{cases} \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{M} = 0 \end{cases} \tag{10.4.12}$$

除此之外，在处理理想刚体 (即无形变，可以不考虑滚动摩擦) 的纯滚动问题时滚动物与其它物体的接触点处相对速度为零，在此点若有摩擦力存在，是为静摩擦力，判断该静摩擦力的方向需要上分小心。这里有一个一般可用的原则：设想此物与接触点脱离，使摩擦不复存在，此时触点切向加速度的反方向，即为静摩擦力的方向。

下面看几个实例：

恒力 $\mathbf{F}$ 作用在半径为 r 的匀质小球 m 的球心 C 处，使小球在地面上作纯滚动，如图10.14 所示。设想 O 点脱离接触，摩擦

力不再存在，由于 **F** 通过质心，小球无转动或转动状态不变，O 点的切线加速度即为质心的加速度，方向向右。因此，静摩擦力 **f** 的方向应当向左 (图10.14)。

若开始时，小球以 ω_0 角速度，$\mathbf{v}_{0c}$ 的质心速度在水平地面上作纯滚动，然后力 **F** 作用在质心 C 上，如图10.15 所示。设想摩擦力不存在，由于 **F** 通过质心，对于质心没有力矩，所以 O 点的切向加速度即为质心 C 的加速度，方向向左因此，静摩擦力 **f** 的方向应当向右，与 **F** 反向。

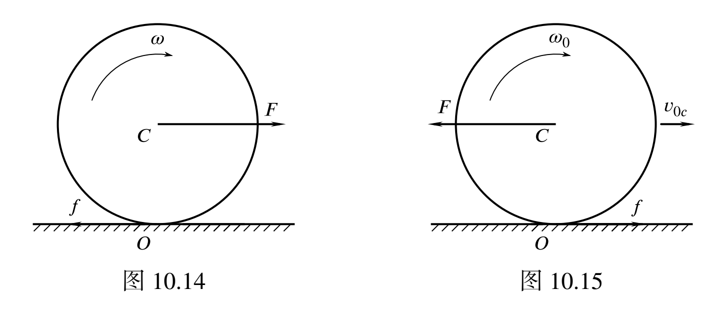


图 10.14　　图 10.15

现有一半径为 r，质量为 m 的小球在粗糙的半圆形碗底作纯滚动，此时小球质心受到切向外力，其大小为 $|\mathbf{F}_t| = mg\sin\theta$，$\mathbf{F}_t$ 总是指向平衡位置 O，如图10.16 所示。根据前面的判断方法，**f** 总是与 $\mathbf{F}_t$ 反向，并总是背向平衡点 O；在小球位于平衡点时，$\mathbf{f} = 0$。

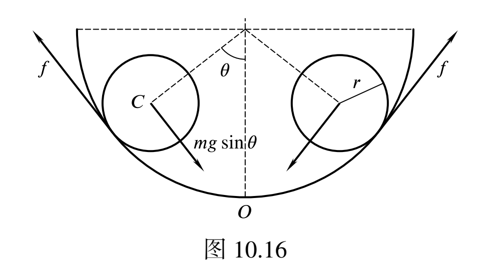


图 10.16

【例 2】　有一匀质圆柱，重 200 公斤，如果加上一通过其质心、与 30° 倾角的固定斜面相平行、方向朝上的 150 公斤力，使其向上作无滑动的纯滚动 (如图10.17)。试求圆柱体质心的线性加速度以及斜面与圆柱间的摩擦力。

图 10.17

解　圆柱的质心在重力、摩擦力 **f** 及外加力 **F** = 150 公斤作用下作加速运动，**f** 的方向根据上面的讨论可以确定如图10.17 所示。整个圆柱又在力矩 fR 作用下绕通过质心的轴作加速转动，故有方程

$$F - P\sin 30^\circ - f = \frac{P}{g}a_c$$

$$fR = I\beta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}R^2\beta$$

另有约束条件

$$a_c = R\beta$$

解之得

$$a_c = \frac{1}{6}g$$

$$= 163.53\text{厘米/秒}^2$$

$$f = 16.7\text{公斤力}$$

一般来说，如果外力不是作用在质心上，或外力的作用线不通过质心，此时静摩擦力的方向不但与外力的方向有关，而且与力的作用线至转轴的垂直距离有关。

【例 3】　设小球在力 F 作用下在平直地面上作纯滚动，F 不是作用在质心 C 上，而是作用在 O' 上，O' 是接触点 O 与质心连

线上的一点，$CO' = d$，如图10.18 所示。设小球半径为 r，质量为 m。试判断接触点 O 处静摩擦力的方向。

解 设 O 点没有摩擦力，则绕质心的转动公式为

$$Fd = I\beta$$

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

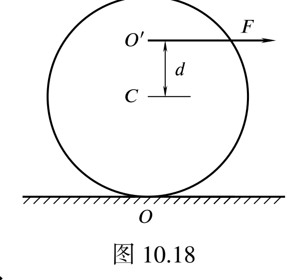


图 10.18

质心的运动方程为

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

触点 O 对地面的切向加速度 a 的大小为

$$a = a_c - \beta r$$

$$= \frac{F}{m}\left(1 - \frac{5d}{2r}\right)$$

由此可得以下判断：

(1) 当 $d < \frac{2}{5}r$ 时，$a > 0$，即 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{F}$ 同向，所以静摩擦力 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{F}$ 反向；

(2) 当 $d > \frac{2}{5}r$ 时，$a < 0$，$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{F}$ 反向，则 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{F}$ 同向；

(3) 当 $d = \frac{2}{5}r$ 时，$a = 0$，此时 O 点无运动的趋向，则 $\mathbf{f} = 0$；

(4) 特别当外力 $F = 0$ 时，则 $\mathbf{a}$ 恒为零，$\mathbf{f}$ 恒为零，小球将保持匀速纯滚动。

【例 4】 拉线轴问题。在水平的粗糙桌面上放一外半径为 R，质量为 m 的线轴，以力 $\mathbf{F}$ 拉线，拉线处距轴中心距为 r，如图 10.19 所示。改变 θ 角能否使线轴向前 (即顺 $\mathbf{F}$ 前方) 无滑动地滚动?

解 先判定 $\mathbf{f}$ 的方向。设若 $\mathbf{f}$ 不存在，则得方程

$$F\cos\theta = ma_c$$

$$Fr = -I_c\beta$$

(在此，顺钟向为 β 正方向。) O 点的切向加速度为

$$a_0 = a_c + \beta R$$

$$= F\left(\frac{\cos\theta}{m} + R\frac{r}{I_c}\right)$$

图 10.19

在 $\theta < 90°$ 情况 F，a_0 恒大于零，



即与 **F** 同方向。所以 **f** 与 **F** 反向，如图10.19 所示。

进一步列出线轴纯滚动方程：

$$F\cos\theta - f = ma_c$$

$$fR - Fr = I_c\beta$$

$$a_c = R\beta$$

解此联立方程，得

$$a_c = \frac{RF(R\cos\theta - r)}{I_c + mR^2}$$

从上式可以得出：

$\theta < \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$ 时，$a_c > 0$，轴向前滚动；

$\theta > \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$ 时，$a_c < 0$，轴向后滚动；

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$ 时，$a_c = 0$，轴不动。

$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$ 是一个临界值，当 $\theta = \theta_0$ 时，**F** 的作用线恰好通过接触点 O，**F** 对 O 点的力矩为零；当 $\theta < \theta_0$ 时，**F** 对 O 点的力矩的方向使线轴向前作纯滚动；当 $\theta > \theta_0$ 时，**F** 对 O 点的力矩的方向使线轴向后作纯滚动。

【例 5】　汽车主动轮的运动情况,类似于车轮受力偶的作用,如图10.20 所示。

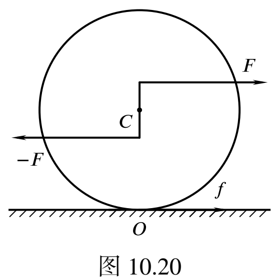


图 10.20

设想 *O* 点脱离接触, 则 *O* 点的切向加速度即为力偶作用下绕 *C* 点的切向加速度,方向向左,所以 *O* 点的静摩擦力 **f** 的方向向右，如图10.20 所示。

在某些情况下，刚体并非作纯滚动，而是既有滚动，又有滑动，我们称它为“连滚带滑”的运动。此时接触点与接触面之间的相对速度不为零，刚体受到的是滑动摩擦力。

10.5　陀　　螺

陀螺是一个典型的刚体运动问题。

所谓陀螺是一个绕轴快速自转的物体，如图10.21 所示。它的转轴不是固定的，但其顶点是固定的，如固定于原点 *O* 处。根据经验，我们知道，这样一个快速自旋的陀螺的轴总是围绕竖直轴转动,并扫出一个圆锥面。现在我们根据经典力学原理来研究一下这种运动情况。特别是想计算出自旋轴绕竖直轴转动的角速度。

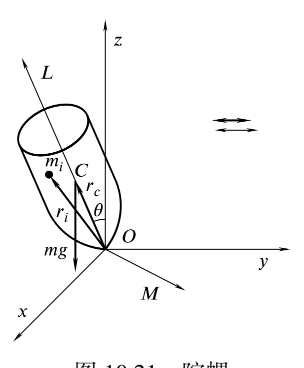


图 10.21　陀螺

由于现在并不是绕固定轴的转动，我们应当用转动方程(10.4.4)作为研究的起点，即

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M} \tag{10.5.1}$$

在每一瞬时，陀螺绕其自旋轴转动，其角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，称为自旋角速度。一般地说，陀螺的总角动量 $\mathbf{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 方向并不相同。但若陀螺的形状是对称的且外力矩 $\mathbf{M}$ 较小，则可以近似地认为 $\mathbf{L}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 同方向。对于我们现在的情况，只有重力相对于 O 点有力矩。由于维持陀螺固定在 O 点，当然也有力在 O 点作用于陀螺，但这种力对 O 点的力矩显然为零。取一质量元 m_i，其重力矩为 $\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}$，故总的重力矩为

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{g} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i}{m}\right) \times m\mathbf{g} \\
&= \mathbf{r}_c \times m\mathbf{g}
\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{r}_c$ 是陀螺质心的位置矢量。对于我们现在讨论的对称陀螺的情况，$\mathbf{r}_c$ 沿自旋轴，故与 $\mathbf{L}$ 平行或反平行。

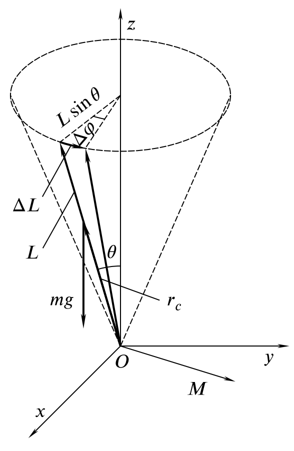


图 10.22　陀螺的动力学

如果快速转动的陀螺放得很正，自旋轴垂直于水平面，于是 $\mathbf{M} = 0$，所以 $\mathbf{L} =$ 不变量，转动轴不变，始终在竖直的方向。

如果陀螺放得不正，自旋轴与竖直方向成角 (图10.21)，则 $\mathbf{M} = \mathbf{r}_c \times m\mathbf{g} \neq 0$，$\mathbf{M}$ 在垂直于 $\mathbf{r}_c$ 和 $m\mathbf{g}$ 所决定的平面 (图10.22，

为清楚起见，图中未画出陀螺本身形状)，即 $\mathbf{M}$ 垂直于 $\mathbf{L}$。由式(10.5.1)，在 Δt 时间里，$\mathbf{L}$ 的变化应为

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M}\Delta t$$

故角动量变化量 $\Delta\mathbf{L}$ 应象 $\mathbf{M}$ 一样垂直于 $\mathbf{L}$。在时间间隔 Δt 末，陀螺的角动量为 $\mathbf{L}+\Delta\mathbf{L}$，因为 $\Delta\mathbf{L}$ 始终垂直于 $\mathbf{L}$，所以新的角动量与原来的角动量有相等的数值，但方向不同。又因 $\Delta\mathbf{L}$ 始终垂直于 Z 轴，因此，角动量 L 的顶端就只能是绕一水平圆周的运动。这就证明了陀螺在斜放时，由于重力矩的作用，除自旋外，自旋轴还绕着竖直轴 (Z 轴) 转动。我们把自旋轴绕竖直轴的转动称为进动。

由图10.22 可求得进动角速率 $\omega_{进}$。用该图中的符号，即有

$$\omega_{进} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

以及

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{M\Delta t}{L\sin\theta}$$

又因

$$M = r_c mg\sin\theta$$

故

$$\Delta\varphi = \frac{r_c mg\sin\theta\Delta t}{L\sin\theta} = \frac{r_c mg\Delta t}{L}$$

最终得到

$$\omega_{进} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{r_c mg}{L} \tag{10.5.2}$$

可见，进动角速率进与角动量的大小 L 成反比。对于同一陀螺来说，自旋角动量愈大，则进动角速率愈小。

地球就是一个陀螺。地球的自转轴相当于陀螺的轴，自转速率是每 24 小时一周。当然，地球的自转中并不存在一个固定的顶点，与前面讨论的情况不完全相同。但若选择地心 (大体也就是地球的质心) 作为基点，则平动与转动相互是分离的，平动部分是地球绕太阳的公转，而转动部分就类似于一个陀螺。

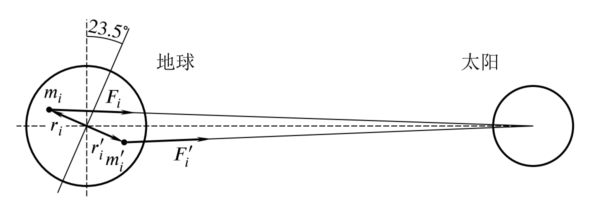


图 10.23　地球的进动

如图10.23，地球的自转轴并不垂直于地球的公转平面，它与该平面的法线之间的夹角为 23.5°。如果地球质量分布相对于自转轴是对称的，则我们可将地球分解为许多相对于该轴对称分布的质元对，如图10.23 中的 m_i 与 m'_i 就是一组对称的质元。太阳作用在它们上的引力相对于 O 的力矩为

$$\mathbf{M}_i = r_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{M}'_i = r'_i \times \mathbf{F}'_i$$

式中 $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}'_i$ 分别是太阳对 m_i, m'_i 的引力。因为 $\mathbf{r}_i = -\mathbf{r}'_i$，所以，若 $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}'_i$，则 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{M}'$ 就会方向相反、大小相同，这样它们就相互抵消。同理，每组质元都有相同的结果，因此，整个地球所受太阳引力对 O 点的力矩为零。但是 $\mathbf{F}_i$ 与 $\mathbf{F}'_i$ 并不严格相等，因为二者与太阳的距离并不完全相同。所以，太阳引力相对于 O 点是有力矩的，即 $\mathbf{M}'$ 与 $\mathbf{M}$ 并不严格相抵消。这个力矩使地球自转轴发生进动。这种现象称为岁差。地球自转轴进动的周期很长，约 26,000 年。尽管如此小，在两千年前它就被希腊天文学家发现了。由于这个效应，地球的自转轴实际上并不总是指向北极星。在公

元前 2,500 年时，“极星”(即自转轴指向的星) 是右垣一 (即天龙 α)，到公元 14,000 年时，“极星”将是织女星。

思 考 题

1. 计算物体的转动惯量时，可否将物体的质量看作集中在质心处？

2. 设有两个圆盘用密度不同的金属制成，但重量和厚度都相同，哪个圆盘有较大的转动惯量？

3. 图10.24 中是五个物体的横截面，这些截面具有相等的高度和相等的最大宽度，这些物体又都具有相等的质量。对于与截面垂直且经过几何中心的转轴来说，哪个物体的转动惯置最大？哪个最小？

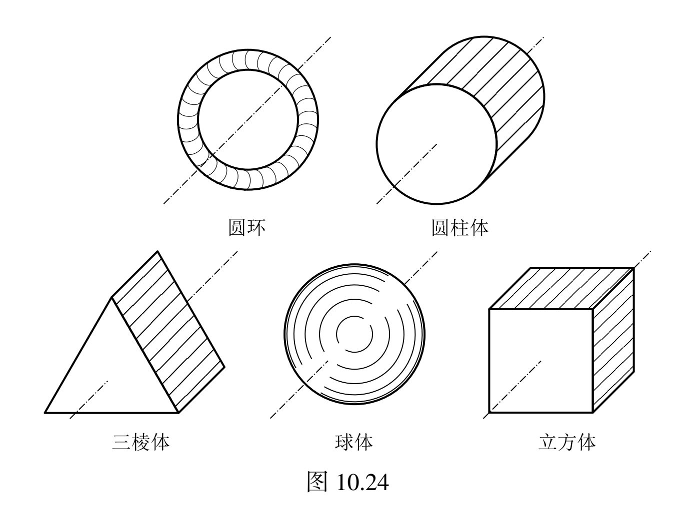


图 10.24

4. 本章10.2 节中指出，为了描写刚体的一般运动，可将运动分解为随某选定的基点 O 的平动加绕 O 的转动，平动的距离及

速度随基点的不同选择而有所不同，但转过的角度及角速度是与基点的选择无关的，这称之为角速度的绝对性。试问：这基点可以 任意选择吗？可以选在刚体之外的空间某点上吗？

5. 有一均匀的实心圆柱体，沿着一光滑斜面自由落下，问它滑下时与液下时其末速度是否相等？

6. 在光滑水平面上有一均匀细棒。证明：在力偶作用下，不管这力偶作用于棒的哪一部位，棒的质心加速度均为零。

习 题

1. 证明转动惯量的平行轴定理：绕任何轴的转动惯量，等于绕通过质心且与该轴平行的轴的转动惯量，加上物体的总质量乘以两轴间距的平方。用公式表示为

$$I = I_c + mr^2$$

2. 证明适用于薄的平面刚体的垂直轴定理：一个平面刚体薄板，对于垂直板面某轴的转动惯量，等于绕平面内与该垂直轴相交的任意两个正交轴的转动惯量之和。用公式表示为

$$I_z = I_x + I_y$$

3. (1) 证明一条质量为 m、长为 l 的均匀细杆，绕通过其中心且垂直于杆身的轴的转动惯量为

$$I_c = \frac{1}{12}ml^2$$

(2) 用平行轴定理证明这杆绕通过其一端且垂直于杆身的转动惯量为 $I = \frac{1}{3}ml^2$。

4. 证明边长分别为 a 和 b 的矩形薄板，绕通过其中心且垂直于板面的轴的转动惯量为 $I_c = \frac{1}{12} + m\left(a^2 + b^2\right)$，其中 m 为板的质量。

5. 边长分别为 a 和 b 的矩形薄板，质量为 m。现在中间挖去一个边长为 c 的正方形。绕通过其几何中心且与板面垂直的轴的转动惯量是多少？

6. 在上题中，如果中间挖去的不是正方形，而是一个半径为 r 的圆形，则转动惯量 I 又为多少？

7. 两个小球的质量分别为 $m_1 = 40$ 克和 $m_2 = 120$ 克，固定在一条质量可忽略的轻棒的两端，棒长 $l = 20$ 厘米。分别求出这系统对于下列两轴的转动惯量。

(1) 通过细棒的中心且垂直于棒；

(2) 通过系统的质心且垂直于棒。

8. 求质量为 m、内半径为 R_1、外半径为 R_2 的中空圆柱体对它的几何对称轴的转动惯量。

9. 求质量为 m、半径为 R 的薄圆盘对通过其直径的轴的转动惯量。

10. 求质量为 m、半径为 R、厚为 h 的圆盘，对通过质心且平行于盘面的轴的转动惯量。

11. 门的宽度为 0.8 米，质量为 5 公斤，用手在离门轴 0.7 米处以 5.0 牛顿的力推门，力的方向与门的板面垂直，求门的角加速度 β。

12. 一个均匀的球沿着与水平面成 α 角的斜面无滑动地滚下(图10.25)，求球心的加速度 α。

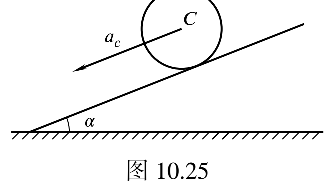


图 10.25

13. 一转动的飞轮，由于轴承摩擦力的作用，在 5 秒钟内转速由 900 转/分减为 800 转/分。求角加速度 β 和 5 秒内的转数间再经几秒后飞轮停止转动？

14. 如图10.26 所示，在质量为 M、半径为 R 的圆柱形滑轮上缠绕细绳，绳一端挂有质量为 m 的小物体，m 由高 h 处从静止状

态下落。设绳不可伸长，滑轮与轴之间无摩擦。求 m 达到地面时的速度 v。

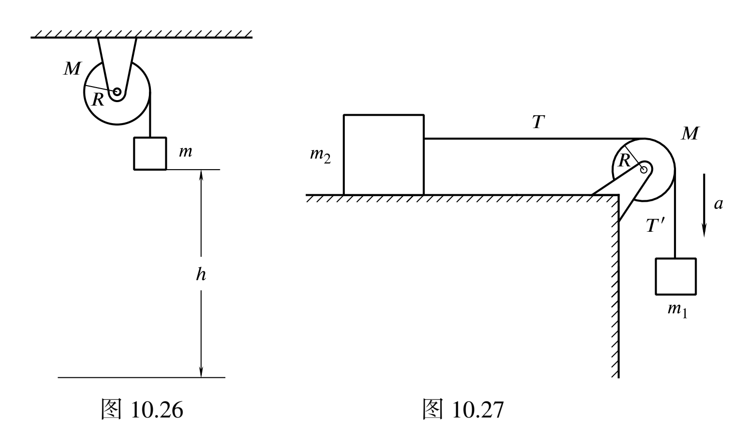


图 10.26　　　　图 10.27

15. 如图10.27 中所示，质量为 m_1 的物体以细绳绕过定滑轮拉质量为 m_2 的物体运动。滑轮半径为 R，质量为 M，其质量集中在轮的边沿，m_2 与平面间的摩擦系数为 μ。设绳长不变，绳的质量和滑轮与轴间的摩擦力都可略去不计。求绳中的张力 T,T' 及 m_1,m_2 的加速度 a。

16. 有一绕线圆盘，半径为 R，质量为 m，在其本身重量作用下滚落，线的上端拴在天花板上，如图10.28 所示。求圆盘中心下落的加速度 a 和绳中的张力 T (设绳不可伸长，绳质量可略去)。

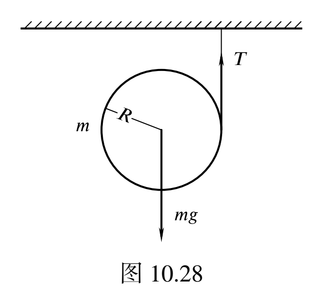


图 10.28

17. 一质量为 10 公斤，等分 20 级的梯子，以 60° 的倾角架在一面光滑的墙上，如图10.29 所示。当一个体重为 60 公斤的人沿梯子向上爬到第 15 级的时候，

梯子开始滑动，求这时地面给梯子的摩擦力 f。

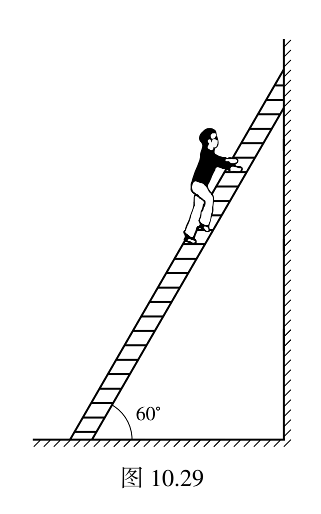


图 10.29

18. 从高为 h 的山顶上滚下一个半径为 R 质量为 m 的石滚子，只滚不滑，求它到达山底时的速度 v。

19. 车床转速为 1,000 转/分，功率为 9.4 千瓦，工作直径为 5.0 厘米问车刀克服的阻力 f 有多大?

20. 有一滑轮组如图10.30 所示，两滑轮 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的质量都是 $\boldsymbol{m}$，半径都是 $\boldsymbol{R}$。滑轮 $\boldsymbol{A}$ 可以随重物 $\boldsymbol{M}$ 的下降而上升。设绳子与滑轮之间无滑动，绳长不变，绳子质量不计。分别求出 $\boldsymbol{M}$ 下降的加速度 $\boldsymbol{a}$ 和各段绳中的张力 $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$。

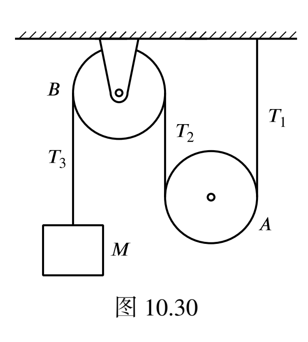


图 10.30

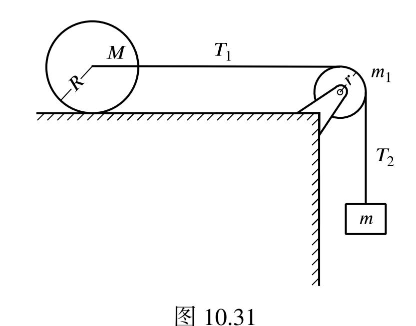


图 10.31

21. 一质量为 $\boldsymbol{M}=10$ 公斤、半径为 $\boldsymbol{R}=20$ 厘米的圆柱体，用绳子系住它的轴，此绳跨过一质量为 $\boldsymbol{m}_1=2.0$ 公斤、半径为 $\boldsymbol{r}=10$ 厘米的定滑轮，在绳的下端悬一质量为 $\boldsymbol{m}=5.0$ 公斤的重物，如图 10.31 所示。设绳长不变，绳的质量及滑轮的轴间摩擦都可忽略不计。当圆柱体沿桌面作纯滚动时，求：

(1) 重物的加速度 a；

(2) 绳的张力 T_1, T_2。

22. 长为 $2a$ 的匀质细棒 AB，以铰链固结于 A 点，起初它在水平位置静止不动。当放开 B 端，棒绕 A 点转至竖直位置时，铰链自动脱落，棒变为自由落体。在以后的运动中，它的重心 C 走一抛物线抛迹，而棒本身则绕重心 C 转动试问当它的重心从 C 位置下降 h 距离时，棒共转了几转？

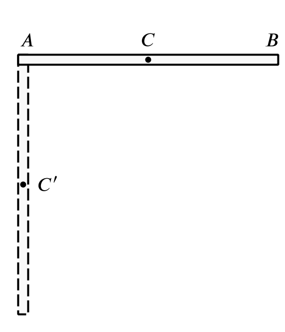


图 10.32

23. 质量为 $k = 0.50$ 公斤的圆盘，直径为 $d = 40$ 厘米，绕几何轴转动；转速为 $n = 1,500$ 转/分，欲使其在 $t = 20$ 秒内停止，求制动它的力矩。

24. 高为 $h = 5.0$ 米的均匀细杆 AB，垂直插在地面上，因为根部 A 被锯断而倒向地面，求：

(1) 顶端 B 到达地面时的线速度 v_B；

(2) 如果杆倒在地面时，它上面某点的速度恰如一物体从和这点同样高度自由下落时的速度一样，求这点到 A 点的距离 y_H。

25. 一个均匀球体和一个均匀圆柱体，具有相同的质量和半径，沿同一斜面同时由静止开始向下动，只滚不滑，且起点在同样的高度。哪个先到达下端？如果与一个无摩擦下滑的质点比较，三者哪个下来得最快？哪个最慢？

26. 有以下四种球

(1) 均匀实心钢球，半径为 $v = 5.0$ 厘米；

(2) 均匀实心塑料球，半径 $R = 10.0$ 厘米；

(3) 均匀钢球壳，半径 $r = 5.0$ 厘米；

(4) 均匀塑料球壳，半径 $R = 10.0$ 厘米。

它们从同一斜面的同一高度 h 同时由静止液下，斜面倾角为 α，球

只滚不滑。求各球的质心加速度 a_c；各球到斜面底部时的速度 v_c 及球滚动的角速度。

27. 半径 $R = 10$ 厘米、重量为 P 的实心圆柱体以 $\omega_0 = 10$ 转/秒的角速度绕几何轴旋转。把这个旋转着的圆柱体放到水平桌面上，任其运动，于是它开始在桌面上连滚带滑。设圆柱体与桌面间的滑动康擦系数为 $\mu = 0.10$ 。问要经过多长时间 t 后，圆柱体的运动才能变成纯滚动?

28. 用手在不光滑的桌面上 ($\mu \neq 0$) 压一匀质的刚性球，使球在桌面上开始连滚带滑，球心速度向右，速率为 v_0，球向左绕其质心以 ω_0 旋转，如图10.33 所示。问 ω_0 与 v_0 之间满足什么条件，球向右走了一段之后会向左滚着回来 (这称之为"来去")? 又在什么条件下，球会在向左行进的某时，同时停止又停转? 再在什么条件下，球会变为向右的纯滚动?

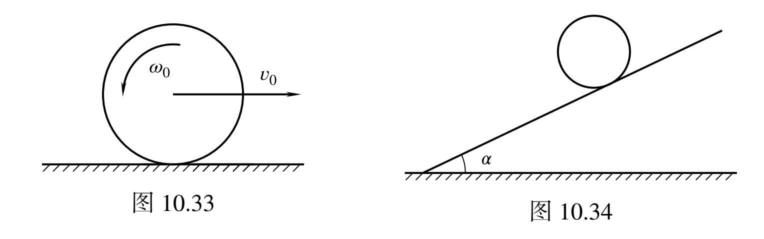


图 10.33　　图 10.34

29. 一圆柱体从倾角为 α 的固定斜面上自由下落 (图10.34) ，斜面的摩擦系数至少应为多大，才会使圆柱体无滑动地纯滚动下来?

第十一章

狭义相对论基础

11.1 实用的惯性参考系

这一章我们再回到牛顿动力学的基本问题，即动力学和参考系的关系。

在第三章中，曾经讨论过惯性系在动力学中的特殊地位。牛顿第一定律，实质上是肯定了自然界中存在着惯性系；牛顿第二定律相对于惯性系才成立。因此，问题是如何找到一个惯性系。牛顿给出了一个原则的标准。他认为存在着绝对时间和绝对空间，那就是我们所需要的一个最基本的惯性系。然而，我们实际上无法判定绝对时空。因此，在处理实际问题时，我们总是要找一些具体参考系，作为实用的惯性系。在动力学中，我们不能摆脱这些实用的惯性系来研究任何问题。所以它有非常重要的应用价值。

如何判断一个实用的参考系是否为惯性系呢？当然，我们可以用牛顿第一定律作为惯性系的定义来加以判断。也就是说，所有不受外力作用的物体，都以匀速直线运动或静止的参考系为惯性系。但问题是：如何判定一个物体不受外力呢？严格说来，自然界中几乎找不到真正不受力的物体，只可能找到受力较小的物体。

物体间的相互作用力有一个共同的特点，它们之间的距离越大时，作用力越小。我们用手臂的肌肉对其他物体施力时，手臂

必须接触该物体；反之，如果手臂与物体不相接触，尽管力气再大，该物体也不改变运动的状态。物体之间的万有引力，不要相互接触也会有作用，但是万有引力的大小与物体间的距离平方成反比，物体间距离越大，引力就越小。自然界中物体之间的几种基本的相互作用，都有这种性质。

上述看法给了我们一种寻找受力较小物体的途径。只要我们找到某物体与其周围物体相距甚远，一般说该物体受力就比较小，选择这样的物体作为参考系，就可以认为近似是一种惯性系，它接近于理论所定义的惯性系。这种选择实用惯性系的方法是很有效的。下面我们介绍几种实用的惯性系。

1. **地球**

这是我们最常用的实用惯性系，在实验室中进行的测量，一般都是选地球参考系。因为地球与其周围物体相距比较远，距离最近的比较重的物体是太阳，地球与太阳间距离很大，约 1.5×10^8 公里；与月亮的距离较近，为 3.8×10^5 公里，但月亮比较小。所以地球是一个相当好的惯性系。当然，它并不是绝对理想的惯性系，当研究行星运动时，就会发现这一点。

2. **太阳系**

这是一个更大的体系。以太阳系平均静止的点作为参考系的基准，是一个更好的实用惯性系。离太阳系最近的恒星的距离约为 4 光年。因为它离其他物体更远，故比地球参考系更好。当然，它与惯性系的要求还是有偏差的，当研究恒星运动时，就会表现出来。

3. **FK4 惯性参考系**

这是我们目前所使用的最好的实用惯性系。它选取 1535 颗星体作为一个体系，把这个体系的平均不动的状态作为参考物。这一体系离其周围其他物体更加遥远，因此更加接近理想。FK4

是一个代号。最初只选了几百颗星参与平均，后来感到还不够，又多次改进扩大星数。FK4 是 1960 年选定的，它比前两个实用惯性系好得多。

现在已在研究比 FK4 更好的惯性系。一种方案是利用一系列射电源作为基准。射电源是目前观测到的最远的天体系统，因此，以射电源为基准将涉及更大的范围，可能比 FK4 更准确。另一种方案是利用微波背景辐射，这种辐射是均匀地猕漫在整个宇宙中的。如果一个物体相对于背景辐射静止，那么，它将看到从不同方向射来的背景辐射强度都相同，即所谓各向同性的，我们就可以定义这种相对背景辐射为静止或匀速运动的体系为惯性系的基准。这是研究宇宙问题时，最方便的一种惯性系。

11.2 相对性原理

在牛顿的体系中，在理论上惯性系是由绝对时间和绝对空间来确定的。牛顿认为，绝对时间和绝对空间是最基本的惯性系。他曾写道："绝对的、纯粹的、数学的时间，就其本性来说，均匀地流逝，而与任何外在的情况无关。""绝对空间，就其本性来说，与任何外在情况无关，始终保持着相似和不变。"这就是说，牛顿认为绝对空间是真正的绝对的静止。按照这种理论定义，我们就应当问，各个实用惯性系相对于绝对空间的速度是多少？

上述问题还有另外一种提法，而且是更早的提法。在牛顿之前，也有绝对空间静止的概念。亚里士多德体系认为，地球是宇宙的中心，它是绝对静止的。在哥白尼体系中，中心不是地球，而是太阳，地球围绕太阳转。这还是绝对空间、绝对静止观念。地心说与日心说之间的争论问题之一是，若地球绕太阳转，其绝对速度如此之快，为什么我们感觉不到？这是从力学观点上对哥白

尼学说的非常大的非难。

伽利略对上述问题给了一个彻底的回答，他说：

“把你和一些朋友关在一条大船的甲板下的主舱里，让你们带着几只苍蝇、蝴蝶和其他小飞虫，舱内放一只大碗，真中有几条鱼。然后，挂上个水瓶，让水一滴一滴地滴到下面的一个宽口罐厘。船停着不动时，你留神观察，小虫都以等速向舱内各方向飞行，鱼向各方向随便游动，水滴滴进下面的罐中，你把任何东西扔给你的朋友时，只要距离相等，向这一方向不必比另一方向用更多的力。你双脚齐跳，无论向哪个方向，跳过的距离都相等。当你仔细地观察这些事情之后，再使船以任何速度前进，只要运动是匀速，也不忽左忽右地摆动，你将发现，所有上述现象丝弯没有变化。你也无法从其中任何一个现象里确定，船是在运动还是停着不动。即使船运动得相当快，在跳跃时，他也将和以前一样，在船底板上跳过相同的距离，你跳向船尾也不会比跳向船头来得远些。虽然你跳到空中时，脚下的船底板向着你跳的相反方向移动。你把不论什么东西扔给你的同伴时，不论他是在船头还是在船尾，只要你自己站在对面，你也并不需要用更多的力。水滴将象先前一样，滴进下面的罐子，一滴也不会滴向船尾。虽然水滴在空中时，船已行驶了许多柞 *。鱼在水中游向水碗前部所用的力并不比游向水碗后部来得大；它们一样悠闲地游向放在水碗边缘任何地方的食饵。最后，蝴蝶和苍蝇继续随便地到处飞行，它们也决不会向船尾集中，并不因为它们可能长时间留在空中，脱离开了船的运动，为赶上船的运动

* “柞”为大指尖到小指尖伸开之长，通常为九英寸，是古代一种长度单位。

而显出累的样子。”*

总之，伽利略认为，从船中发生的任何一种现象，你是无法判断船究竟是在运动还是停着不动。在地球上你并不能感到地球的运动。

用牛顿力学的语言来说，大船就是一种惯性系。在一个惯性系中所能看到的种种现象，在另一个惯性系中必定也能无任何差别地看到。也就是所有惯性系都是平权的、等价的。因此，我们不可能判断哪个惯性系是处于绝对静止状态，哪个是有绝对运动的。这个论断称为伽利略相对性原理。

伽利略相对性原理不仅从根本上解决了对哥白尼学说的力学非难，而且在惯性运动范围内否定了绝对空间观念。牛顿对伽利略的论断是十分了解的，他知道实际上无法测出绝对速度，亦即在各惯性系中间，无法断定哪一个相应于绝对空间。所以，牛顿在讨论绝对空间时，也并未提出测量绝对速度，而只强调了测量绝对的加速度。对后一点，我们将在下章中讨论。

牛顿的绝对空间观念虽然不合于伽利略相对性原理，但是牛顿力学规律却是与相对性原理相治的。相对性原理要求，所有惯性系是平权的。那么，在所有的惯性系中，动力学规律的形式应当是相同的。现在我们证明，牛顿第二定律是符合这个要求的。有两个惯性系 K 及 K'，K' 相对于 K 以速度 $\mathbf{u}$ 运动。在 K 系中，牛顿动力学规律是

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{11.2.1}$$

K 及 K' 系之间的时空遵从伽利略变换关系，即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t - \mathbf{d}_0 \tag{11.2.2}$$

$$t' = t + t_t0$$

*类似伽利略哪种原始形式的相对性原理思想，中国古代也曾有过。在公元前一世纪成书的《尚书纬・考灵曜》中写着：“地恒动不止，而人不知，如人在大舟中，闭窗而坐，舟行而人不觉也。”当然，这种原始的思想，在当时不可能形成完整的科学体系。

其中各量的物理意义已在第二章第五节中讨论过，由此容易推出

$$\frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

这个式子表示，一个物体相对于 K 系的加速度与相对 K' 系的是一样的，即

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \tag{11.2.3}$$

另外，两物体间的作用力常常只取决于物体之间的距离，而在伽利略变换下，距离是不变量，所以，同一相互作用力相对于 K 与相对于 K' 是一样的，即

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \tag{11.2.4}$$

再则，在牛顿体系中也假定质量是不变的，同一物体，在任何惯性系中都具有相同的质量，即

$$m' = m \tag{11.2.5}$$

这样，将式(11.2.3) (11.2.5)代入式(11.2.1)，就得到

$$\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}' \tag{11.2.6}$$

可见，在 K' 系中牛顿动力学方程仍与(11.2.1)形式完全一样。这就完全证明了牛顿动力学规律与相对性原理是相洽的。

11.3 狭义相对论的基本原理

爱因斯坦首先认识到相对性原理的特别的重要性。他强调这是整个物理学都必须遵守的一条最基本的原则，也就是不仅是力学规律，而且任何动力学规律，对不同惯性系应具有相同的形式；不仅用力学现象，而且用任何现象都不能测出绝对速度。

诚然，在伽利略的原始表述中所列举的种种现象 (水滴、蝶飞、鱼游……) 中，并非只限于力学现象。但是，在牛顿力学时期，受到定量研究的现象只有力学现象。因此，相对性原理实际上只

是相当于要求牛顿动力学规律适用于所有惯性系。因此，它并没有带来什么新结果。这一点在上节已讨论过了。

然而，如果把相对性原理也应用于光学现象，立即会得到不同于牛顿理论的新结果。为此，我们回忆一下第二章的一些结果。我们曾利用一个特制的雷达钟，并根据光速不变性质，推得了运动钟的变慢。并且说这种变慢现象与所用的钟无关，是普遍的，即用其他钟来测量也一样。这个断言就是根据相对性原理。如果时钟变慢只是雷达钟的结果，那么，我们就可以找到一个“好”钟，它在 K 中和 K 中总是走得一样，没有变慢现象。这样，当“好”钟与雷达钟都在 K 中时，我们将看到它们走得一样快慢，即同步的。而当它们在 K 中时，就不一样了，因为“好”钟仍与 K 中的钟一样快慢，而雷达钟不同，所以两钟必有偏差。由此，我们就可以从两钟的偏差来表明各惯性系不是平权的、等同的，而这是与相对性原理相矛盾的，因此，相对性原理要求，只要有一种钟变慢，则其他钟必然也变慢。

上述例子已使我们看到，从相对性原理及光速不变性，能得出多么重要的不同于牛顿经典力学的结论。爱因斯坦所发展的狭义相对论，就是以这两条为出发点，根本改造了牛顿理论的时空观。本章下面几节，将较系统地讨论狭义相对论的主要内容。在此之前，我们再用爱因斯坦的原话来表述一下狭义相对论的两条原理。1905 年，爱因斯坦在他的狭义相对论的奠基性论文《论运动物体的电动力学》一文中写道：

> “下面的考虑是以相对性原理和光速不变原理为依据的，这两条原理我们规定如下：
>
> (1) 物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。
>
> (2) 任何光线在静止的坐标系中都是以确定的速度 c

运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。”

应当说明，对于任何普遍性的原理，我们在原则上总是不能说实验证明了这个原理，因为普遍的原理总是涉及无限多的具体情况，而在有限的时间里，我们只能完成涉及有限具体情况的实验。因此，与其说用实验去证明某原理，不如说用实验去验证从该原理所推得的种种具体结论。我们也将以这种态度来对待狭义相对论的两条基本原理。所以，我们将研究由这两条原理出发，到底能得到哪些特别的结论。

11.4 洛伦兹变换

从速度合成律的讨论已经看到，光速不变原理与伽利略变换是矛盾的。为了满足光速不变原理的要求，惯性系之间应当有不同于式(11.2.2)的时空坐标变换关系，现在我们就来寻求它。

图 11.1 给出的两个惯性系 K 及 K'，设在某一时刻 (取为 $t = t' = 0$)，K 与 K' 的原点是重合的，并且在这时刻位于原点的光源放出一个光讯号。在 K 中，光讯号的波前是以 K 的原点为心的球面，由下列方程所规定

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

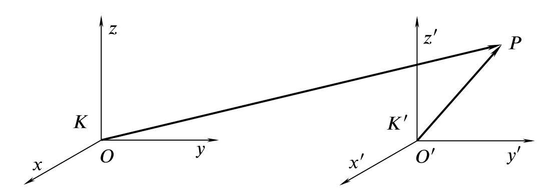


图 11.1 K 及 K' 两个参考系

由于光速不变，在 K' 中，这个光讯号的波前应是以 K' 的原

点为心的球面，即

$$x'^2+y'^2+t'^2-c^2t'^2=0$$

这样，只要要求 (x,y,z,t) 与 $\left(x',y',z',t'\right)$ 之间的变换关系满足下式

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-c^2t^2\\=&x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2\end{aligned}\tag{11.4.1}$$

就可以与光速不变原理相适应。

现在我们来求满足式(11.4.1)的坐标变换关系。首先我们注意到，因为只在 x 方向 K 与 K' 有相对运动，y,z 方向并没有相对运动，所以关于 y,z 的变换应当是

$$y'=y\qquad z'=z\tag{11.4.2}$$

另外，还应要求坐标变换是线性的，这个要求来源于空间的均匀性，即空间中各点的性质都是一样的，没有任何具有特别性质的点。这样，x,t 与 x',t' 之间的关系应有下列的一般形式：

$$\begin{aligned}x'&=\alpha x+\gamma t\\t'&=\delta x+\eta t\end{aligned}\tag{11.4.3}$$

为了使式(11.4.3)满足于式(11.4.1)，即

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2\tag{11.4.4}$$

式(11.4.3)应具有下列形式：

$$\begin{aligned}x'&=x\operatorname{ch}\theta-ct\operatorname{sh}\theta\\ct'&=-x\operatorname{sh}\theta+ct\operatorname{ch}\theta\end{aligned}\tag{11.4.5}$$

其中 θ 为常量。容易验证式(11.4.5)符合式(11.4.4)：

$$\begin{aligned}&x'^2-c^2t'^2\\=&(x\operatorname{ch}\theta-ct\operatorname{sh}\theta)^2-(-x\operatorname{sh}\theta+ct\operatorname{ch}\theta)^2\\=&x^2\left(\operatorname{ch}^2\theta-\operatorname{sh}^2\theta\right)-c^2t^2\left(\operatorname{ch}^2\theta-\operatorname{sh}^2\theta\right)\\=&x^2-c^2t^2\end{aligned}$$

引入新参数 $\beta=\operatorname{tgh}\theta$

亦即
$$\operatorname{sh}\theta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \operatorname{ch}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式(11.4.5)还可以改写成

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' &= \frac{t-\beta\dfrac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{11.4.6}$$

或者把(11.4.2)及(11.4.6)的 x, y, z, t 解出，得到

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+\beta c'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t'+\beta\dfrac{x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{11.4.7}$$

现在，我们来确定系数 β。由于 K' 相对于 K 在 x 方向以速度 v 运动，所以对于 K 中的观察者，K' 的原点，即 $x'=y'=z'=0$ 点的速度应是 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0$。另一方面由式(11.4.7)可得(注意用 $x'=y'=z'=0$)：

$$\mathrm{d}x = \frac{\beta c\,\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \mathrm{d}y = 0 \quad \mathrm{d}z = 0 \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

故
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta c\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta c \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以得到

$$\beta c = v \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{11.4.8}$$

将上式代入式(11.4.2)、(11.4.6)或者式(11.4.7)，就得到惯性系 K 与 K' 之间的时空坐标变换关系

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{11.4.9}$$

或

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' - \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{11.4.10}$$

式(11.4.9)或(11.4.10)称为洛伦兹变换。

当速度 $v \ll c$ 即 $\dfrac{v^2}{c^2} \ll 1$ 时，如果忽略掉 $\beta^2 = \left(\dfrac{v}{c}\right)^2$ 以上的各级小量，式(11.4.9)就过渡为伽利略变换式(11.2.2)了。这表明，在牛顿力学中所采用的时空坐标变换是只适用于低速情况的，在高速情况它不正确。

在伽利略变换中，时间与空间是相互分开的，变换 $t' = t + t_0$ 中只含有 K 及 K' 中的时间坐标。这正符合我们按日常经验所建立起来的观念：时间与空间是“绝对”分开的两个概念。但是，在洛伦兹变换〔式(11.4.9)〕中，时间的变换不再与空间无关。

11.5 相对论的时空观

显然，由洛伦兹变换所描写的时空性质，是根本不同于经典的时空观念的。为了弄清楚相对论时空观的特点，我们考查一下在新的时空观下，哪些物理量是相对的？哪些物理量是绝对的？亦即哪些度量结果依赖于所选用的参考系？哪些结果则与参考系无关？

1. 时间间隔的相对性

假定有两个物理事件，对于参考系 K' 发生于同一地点，但不同的时间。例如，一个对 K' 静止的时钟，其长针相继两次指向处，就构成了这样两个事件：

$$A\left(x', y', z', t_1'\right)$$

$$B\left(x', y', z', t_2'\right)$$

按照式(11.4.10)，对于 K，这两个事件分别发生在下列时刻：

$$t_1 = \frac{t_1' + \dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

故有

$$t_2 - t_1 = \frac{t_1' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > t_2' - t_1' \tag{11.5.1}$$

这表明，在 K 中的观察者，所测得事件 A 与 B 的时间间隔大于在 K' 中观察者的测量结果；换言之，对 K' 静止的时钟，从 K 中的观察者看来，是走慢了。反之，同样可以证明对 K 静止的时钟，从 K' 中的观察者看来，是走慢了。总之，相对于观察者运动的

钟，总比相对他静止的钟走得慢。这就是第二章中用雷达钟所分析得到的结论。

2. **长度的相对性**

假定有一直尺相对于 K' 是静止的，并且放置在 x 方向。如果直尺两端的坐标分别是 x_1' 及 x_2'，则对于 K' 中的观察者，直尺的长度是 $L' = |x_1' - x_2'|$。如果在 K 中有一个观察者，在时刻 t 对该直尺进行测量，得到直尺两端的坐标为 x_1, x_2，则按式 (11.4.9)有

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

所以对于 K，直尺的长度为

$$\begin{aligned} L &= |x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}|x_1' - x_2'| \\ &= L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &< L' \end{aligned} \tag{11.5.2}$$

这表明，在 K 中的观察者所测得的直尺长度总小于在 K' 中的观察者所测得的结果。换言之，对于 K' 为静止的直尺，在 K 中的观察者看来，是缩短了。反之，可以证明，对于 K 为静止的直尺，在 K' 中的观察者看来，是缩短了。总之，相对于观察者运动着的直尺，总比静止着的直尺短一些。这个结论我们在第二章中也曾得到过

3. **同时的相对性**

如果对于 K'，当时刻 t' 在两个点 x_1' 及 x_2' 处同时发生了两个物理事件 A 及 B。按照经典观点，在 K' 中同时发生的两事件，

在其他惯性系中来看，也是同时发生的，即“同时”是绝对的概念。

但是，在相对论中却有完全不同的结论。由式(11.4.10)容易得到，对于 $\boldsymbol{K}$，事件 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 发生的时间应是

$$t_1=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad t_2=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

所以对 $\boldsymbol{K}$ 而言，这两个事件不是同时发生的。它们相隔的时间为

$$\begin{aligned}\Delta t&=t_2-t_1\\&=\frac{v}{c^2}\cdot\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{11.5.3}$$

Δt 可能为正，也可能为负，这取决于 $x_1'-x_2'$ 的符号。它表明，事件 $\boldsymbol{A}$ 可能发生于事件 $\boldsymbol{B}$ 之前，也可能发生于后。这就证明了，在相对论中同时是相对的。

4. 时序与因果关系

不仅同时是相对的，而且事件发生的时间次序也是相对的。设事件 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 对 $\boldsymbol{K'}$ 来说，发生的地点与时间分别是 (x_1',t_1') 及 (x_2',t_2')，则对于 $\boldsymbol{K}$，事件 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 发生的时间是

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

故

$$t_1-t_2=\frac{t_1'-t_1'+\frac{v}{c^2}\left(x_1'-x_2'\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

假定对于 K'，事件的时序是先 A 后 B，即 $t_1'-t_2'<0$ ，那么当 $\frac{v^2}{c^2}\times\left(x_1'-x_2'\right)$ 足够大，以致下式成立

$$t_1'-t_2'+\frac{v}{c^2}\left(x_1'-x_2'\right)>0$$

或者

$$\left|\frac{x_1'-x_2'}{t_1'-t_2'}\right|>\frac{c^2}{v} \tag{11.5.4}$$

则事件的时序在 K 中就颠倒过来了。是先 B 后 A，即 $t_1-t_2>0$。这就证明了时序的相对性。

乍一看来，时序的相对性与因果关系是矛盾的。我们知道，原因总应该发生在结果之前，如果事件 A 与 B 之间有因果联系，那么先 A 后 B 的时序就应当是绝对的，即无论在哪个惯性系中观察，总应该得到先 A 后 B 的结果。但是，洛伦兹变换却可能使时序改变，亦即可能因果倒置怎样才能把因果关系的绝对性与时序的相对性统一起来呢？

为此，我们分析一下事件之间因果联系的必要条件。倘使事件 A 与 B 之间有因果联系，就应当有某种作用从 x_1' 出发经过时间间隔坛 ti 传递到了 x_2'。这种作用使原因 A 得以产生结果 B。亦即，因果事件之间相互作用的传递速度 v 至少应当为

$$v_i=\left|\frac{x_1'-x_2'}{t_1'-t_2'}\right|$$

代入式(11.5.4)，就得到

$$v_i v>c^2$$

这表明，只当 v_i 或 v 之一大于 c 时，才会出现因果倒置的情况。也就是说，只在下列两种情况之一成立时，才会观察到先果后因的现象：

(1) 因果作用的传递速度 v_i 超过光速；

(2) 事件对于观察者的运动速度超过光速。

但是，下面将讨论，在实际的情形中，我们永远不可能把原来小于光速运动的物体加速到超过光速。所以上述两种情况是不会发生的。这就统一了因果次序的绝对性与时序的相对性。总之，可能有因果联系的两个事件 ($|x_1' - x_2'|/|t_1' - t_2'| < c$) 的时序不会经洛伦兹变换而改变，没有因果联系的两个事件 ($|x_1' - x_2'|/|t_1' - t_2'| > c$) 的时序是可以改变的。

5. 时空间隔的绝对性

在洛伦兹变换下，两个事件 (x_1, y_1, z_1, t_1)、(x_2, y_2, z_2, t_2) 的时间间隔及空间间隔都是相对的，而它们的时空间隔是绝对的。时空间隔被定义为

$$s = \left[c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2\right]^{1/2}$$

利用洛伦兹变换，容易证明

$$\left[c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2\right]^{1/2}$$
$$= \left[c^2 (t_1' - t_2')^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2\right]^{1/2}$$

或 $$s = s'$$

这表明，对 s 的测量结果不依赖于参照系的选择。

对于在时空上无限邻近的两个事件，其时空间隔可以写成微分形式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2} \tag{11.5.5}$$

还常常利用如下定义的量

$$\tau = \frac{1}{c}s \quad 或 \quad \mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}s \tag{11.5.6}$$

它被称为原时间隔。由于光速是个绝对量，故原时间隔也是个绝对量。一个质点的运动可以看成一系列连续出现的物理事件，这时，两个无限邻近的运动状态的原时间隔是

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \\ &= dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} \\ &= dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned} \tag{11.5.7}$$

其中 u 是质点相对于 K 的速度大小。$d\tau$ 的绝对性表明，若质点相对于 K' 的速度为 u'，就将有

$$\begin{aligned} d\tau &= dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= dt'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \end{aligned}$$

6. **速度合成律**

为了求得相对论的速度合成公式，我们首先把洛伦兹变换（式(11.4.10)）写成微分形式

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dy = dy' \\ dz &= dz' \qquad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{11.5.8}$$

显然，对于 K，质点的速度分量是

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

对于 K'，质点的速度分量是

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

利用式(11.5.8)中最后一式除前面三个式子，并且利用上述表示，就得到

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \dfrac{v}{c^2}} \\
u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_y \dfrac{v}{c^2}} \\
u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_z \dfrac{v}{c^2}}
\end{aligned}
\tag{11.5.9}
$$

式(11.5.9)称为爱因斯坦速度合成律。在低速情况 $v \ll c$，略掉上式中含 $\frac{v}{c}$ 的项，它就过渡为

$$
u_x \approx u'_x + v \quad u_y \approx u'_y \quad u_z \approx u'_z
$$

这就是牛顿力学中的速度合成律。

爱因斯坦速度合成律的一个有趣的性质是：两个小于或等于 c 的速度之和，永远不能超过 c。为了看清这一点，我们来讨论一个运动光源。光源发的光相对于光源的速度为 c，若光源相对于实验室的速度为 $0.5c$，并且二者速度皆在 x 方向上。则 $v = 0.5c, v'_x = c, v'_y = v'_z = 0$，所以由式(11.5.9)有

$$
u_x = \frac{c + 0.5c}{1 + \dfrac{0 + 0.5c^2}{c^2}} = c \quad u_y = u_z = 0
$$

亦即光相对实验室的速度仍为 c。这个速度合成公式表明了，我们不可能把一个原以小于光速运动的质点慢慢加速到光速以上。所以，光速 c 是这种加速所能达到的极限。

下面我们看几个例题。

【例 1】 设地球在某个洛伦兹参考系中是静止的。在这个参考系中进行测量时，一个宇宙飞船以速度 $\frac{3c}{5}$ 离开地球飞向离地球 3 光年的点，然后再反转其速度方向回到地球上。在地球上有一个光钟，它每年发出一个光脉冲，船起飞时钟指着 $t=0$，在飞船的整个旅行过程中，地面上的钟发出 11 个脉冲，依次为 $t=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 。在飞船上也有一个同样结构的钟，飞船起飞时，指着 $t'=0$。试问：

(1) 在旅行过程中，飞船内的钟共发出几个脉冲？

(2) 用飞船上的钟测量，在什么时刻收到从地球传来的相继诸脉冲？

(3) 用地球上的钟测量，在什么时刻收到从飞船上传来的相继诸脉冲？

解 (1) 因为原时间隔是个绝对量，即

$$\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\mathrm{d}t'\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}$$

同样一个事件 (飞船来回) 对地面参考系

$$\mathrm{d}t=10 \quad u=\pm\frac{3}{5}c$$

而对飞船参考系，

$$u'=0$$

代入第一式得

$$\mathrm{d}t'=10\times\frac{4}{5}=8$$

所以在飞船上相应 8 年，即共发出 9 次脉冲，相应于 $t'=0,1,2,3,4,5,6,7,8$。

(2) 与 (3) 联合求解。对于这种过程，一般可以用时空图来表示，时空图即取纵坐标轴为时间轴，横坐标为空间轴 (由于一般只关心沿速度方向的变化，所以在我们的课程中空间只用一维表

示)。本题的时空图如图 11.2 所示。(习惯上取 $c=1$，以后的时空图都如此。)

若讯号的发射者与接收者以相对速度 v 运动，由于多普勒效应，发射的频次 ν 与接收到的频次 ν' 之间应当有以下关系：

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\nu$$

当飞船与地球远离时，

$$v = +\frac{3}{5}c \qquad \nu' = \frac{1}{2}\nu$$

当飞船与地球接近时，

$$v = -\frac{3}{5}c \qquad \nu' = 2\nu$$

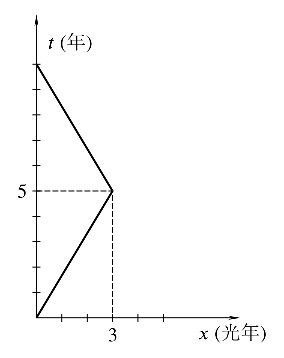


图 11.2　在地球参考系看，飞船航行的时空图

据此，得以下两表中的结果。注意，飞船在 $t'=4$ 时转向，此时飞船经受加速度。

表 11.1　地球的光钟发出的脉冲读数 t 到达飞船时，飞船上光钟的读数 t'

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t'	0	2	4 (飞船转向)	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8

表 11.2　飞船上光钟发出的脉冲读数 t' 到达地球时，地球的光钟的读数 t

t'	0	1	2	3	4 (飞船转向)	5	6	7	8
t	0	2	4	6	8	8.5	9	9.5	10

【例 2】　一列火车在一平直的铁道上匀速行驶，铁道穿过一个隧道。在静止时，火车恰好与隧道一样长。然而，现在火车以

$v=\frac{3}{5}c$ 的速率运行。火车司机说："隧道由于洛伦兹收缩，比火车短，因此，火车决不可能在任一时刻全部处在隧道之中。"隧道看守人却说："火车因为洛伦兹收缩，比隧道短，所以火车在某一时刻是全部处在隧道之中的。"他们谁也说服不了谁。

(1) 司机决定用实验解决这个争论。他在火车头尾两端各安装一个定时火箭，使火车的中点与隧道中点重合时，两个火箭同时沿竖直方向飞出。这将发生什么结果？画出这些事件的时空图，分别用火车参考系和隧道参考系描述这些事件的先后次序。

(2) 隧道看守人也不示弱。他在隧道两端竖立巨大的定时铁门，使得当火车中点到达隧道中点时，两门同时关上。用两种参考系来描述这些事件的先后次序。

解　为了说明事件的次序，用时空图的方法最清楚

(1) 取火车为参考系 K，隧道为参考系 K'，隧道以 $v=-\frac{3}{5}c$ 向负 x 方向运动，根据式(11.4.9)，二者的变换为

$$x'=\frac{x+vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad t'=\frac{t+\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

t' 轴是

$$x'=0$$

即

$$x+vt=0$$

为过原点、斜率为 $\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{3}{5}$ 的直线。同理可求得 x' 轴是过原点，斜率为 $-\frac{5}{3}$ 的直线。如图 11.3 所示，$\operatorname{tg}\theta=-\frac{3}{5}$。

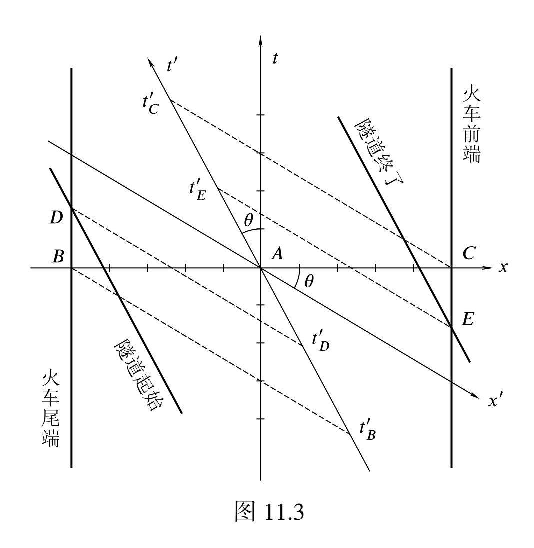


图 11.3

A——火车中点与隧道中点相重合； *B*——火车尾端火箭爆发；
C——火车前端火箭爆发； *D*——火车尾端进入隧道；
E——火车前端从隧道出来

从时空图上很容易看清楚，虽然 K 系的司机及 K' 系的看守都确认：火箭是在隧道外面发射的，但各自认定的事件顺序却不同。司机认为，事件的顺序是 $E,(A,B,C),D$，两支火箭都是在比火车短的隧道之外同时爆发的。看守却认为，事件的顺序是 B,D,A,E,C，一个火箭爆发得太早 $(t'_B < t'_A)$，而另一个则爆发得太迟 $(t'_C < t'_A)$，虽然火车比隧道短，但火箭却都是在外面爆发的。

(2) 按上述同样方法作出图 11.4，取隧道参考系为 K，火车参考系为 K'，火车以 $v = \dfrac{3}{5}c$ 向 x 轴正方向运动，$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{3}{5}$。

隧道看守认为，事件的顺序是 $D,(A,B,C),E$，火车尾端是在两门关上之前进入隧道的，火车前端是在两门关上之后试图冲出去的，所以火车变短与车撞铁门没有矛盾。司机认为，事件的顺

序是 C, E, A, D, B，他认为，前方铁门关得太早 ($t'_C < t'_A$)，发生了碰撞，而碰撞的讯号沿碰撞光锥线传播，尚未传到火车后端，故不知撞车事件的火车后端继续行驶，使得它在关得太迟的后方铁门落下之前进入隧道 ($t'_B < t'_D$)。

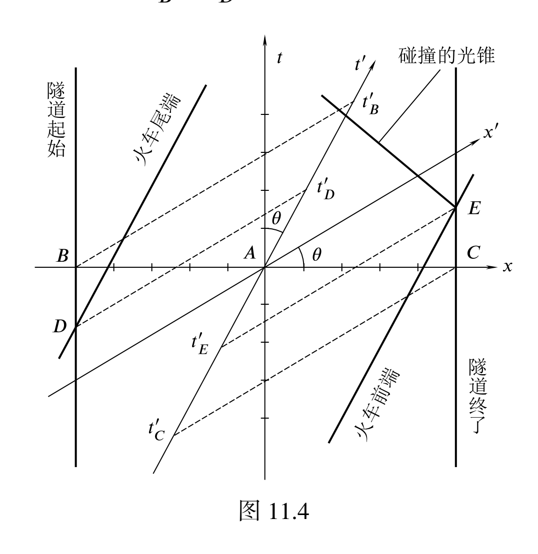


图 11.4

A——火车中点与隧道中点相重合；　B——隧道起始处门关上；
C——道终了处门关上；　D——火车尾端进入隧道；
E——火车前端撞上铁门

【例 3】　光行差问题相对论的“海市蜃楼”。不仅时间的“先后”会变化，空间的“前后”也会变化。有时候为了表示“绝对不可能”这种意思，我们常说：谁能看见自己脑后头的东西的确，人眼的视角只比 180 度稍大一点。所以，要想看到脑后的东西，似乎是绝对办不到的。

根据相对论，则不尽然。

设想一条飞船，飞船前端有一个半球形的观察室。此飞船沿正 x 方向飞行，接受到一颗恒星发出的光讯号。在恒星为静止的

参考系 K 中，星在 xy 平面上，讯号来的方向与飞船的轴成 θ 角。根据洛伦兹变换，在飞船为静止参考系 K' 中，讯号来的方向角为 θ'，所有 $\theta' < \frac{\pi}{2}$ 的恒星，在观察室里都可以看见(图 11.5)

图 11.5

根据式(11.4.5)，取 $c = 1$，得

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\varphi - t\,\mathrm{sh}\,\varphi \quad y' = y \quad z' = z$$

$$t' = t\,\mathrm{ch}\,\varphi - x\,\mathrm{sh}\,\varphi$$

其中有

$$\mathrm{th}^{-1}\,v = \varphi$$

设恒星距离为 l，则在 $x = l\cos\theta, y = l\sin\theta, t = -l$ 发的光，在 $x = 0, y = 0, t = 0$ 被接收到。所以，在 $x' = 0, y' = 0, t' = 0$ 接收到的光，是在

$$x' = (l\cos\theta)\,\mathrm{ch}\,\varphi - (-l)\,\mathrm{sh}\,\varphi$$

$$y' = (l\sin\theta)$$

$$t' = (-l)\,\mathrm{ch}\,\varphi - (l\cos\theta)\,\mathrm{sh}\,\varphi$$

发射的。

由此求得

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

$$= \frac{l\sin\theta}{l\cos\theta\,\mathrm{ch}\,\varphi + l\,\mathrm{sh}\,\varphi}$$

所有 $\theta' < \frac{\pi}{2}$ 的恒星，都观察得到，此即要求

$$\mathrm{tg}\,\theta' < \infty$$

或
$$l\cos\theta\,\mathrm{ch}\,\varphi + l\,\mathrm{sh}\,\varphi > 0$$
即
$$\cos\theta > -\mathrm{th}\,\varphi$$
当 $v = 1$ 即 $(v = c)$ 时，$\mathrm{th}\,\varphi = 1$，上式变成
$$\cos\theta > -1$$
即
$$\theta < 180^\circ$$
此时全部星空都可以在飞船观察室里看见。

具体地说，如果飞船的航向指向北极星，当它的速度很小时，观察室内乘员 A 眼前的星空景象同生活在地面上的人面向北极星时所看到的是一样的。这时，北极星在中央，北斗、仙后、武仙等星座环绕在它的周围（图11.6(a)），南天的星不在视野之内。

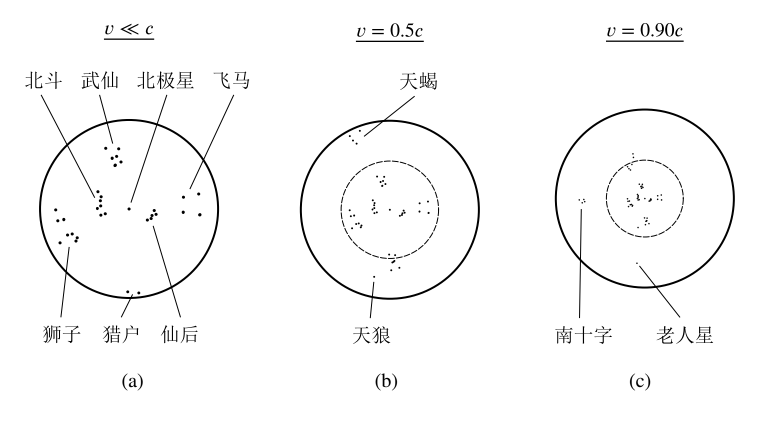


图 11.6　不同速度时飞船人看到的景象

飞船加快速度，当达到光速的一半时，展现在 A 眼前的星空景象将大大变化了。他看到原来在北极星周围的屋都向中央聚拢，挤到虚线圆所表示的范围之中，虚线圆外面的天狼和天蝎，原来都是在“后”面的，现在开始进入前面（图11.6(b)）。

随着速度的继续增大，将有越来越多的原来在“脑后”的星进入视野。当速度达到光速的 90% 时，南天的十字座和老人星也都能看到了（图11.6(c)）。如果飞船速度接近光速，则原来整个天空中的所有恒星和星系，都无例外地“挤”到前面来了。

因此，只要运动速度足够接近光速，那么，即使原来在脑后的东西，我们也是能看到的。这就出现一种奇怪的景象，当 A 以接近光的速度逃离地球时，他将看到地球就在他的航向的前侧方；当 A 以接近光的速度逃离太阳时，太阳也就在他的航向的前侧方。无论他向什么方向逃，他要离开的地方总是在他的前方其实，他看见的只不过是相对论的“海市蜃楼”

11.6 相对论力学

现在我们来讨论经典力学规律与新的时空观的关系。牛顿运动方程与相对论时空观是有矛盾的。例如，相对论时空观断言，不能把物体加速到超过光速。但是，按照牛顿力学，在原则上总是可以把任何物体加速到大于光速，只要对该物体施以长时间的足够大的力。因此，牛顿运动方程必须加以修正。修正的原则是相对性原理。

我们要寻找能与狭义相对论相协调的力学规律。注意到在低速范围洛伦兹变换过渡为伽利略变换，所以相对论力学规律，在低速范围应过渡为牛顿运动方程。根据这一考虑，我们仍可以将相对论中的力学规律写成

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(mv_x\right) &= F_x \\ \frac{d}{dt}\left(mv_y\right) &= F_y \\ \frac{d}{dt}\left(mv_z\right) &= F_z\end{aligned} \tag{11.6.1}$$

但是，不同于牛顿情况，现在质量 m 及力 F 不再是绝对量，即相对于不同的坐标系，其数值是不同的。只当速度小时，这二者才是绝对量。我们不去全面地证明方程(11.6.1)如何符合狭义相对论的要求。下面仅讨论式(11.6.1)若遵从狭义相对论，质量 m 应怎样变换，为了区别，以后称牛顿理论中所用的质点质量为静止质量 m_0。

考虑两个质点。相对于 K，它们的质量分别为 m_1 及 m_2，速度都在 x 方向上，分别为 u_1, u_2，并且两质点的动量和为零。

$$P = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 \tag{11.6.2}$$

两质点所构成的体系的总质量为

$$M = m_1 + m_2 \tag{11.6.3}$$

而整个体系对 K 的速度，按定义为 $V = \dfrac{P}{M} = 0$，即静止。

再从 K' 中的观察者来分析这两个质点。根据相对性原理，如果力学规律具有式(11.6.1)的形式，则两质点对 K' 的动量仍应具有式(11.6.2)的形式，即

$$P' = m_1' u_1' + m_2' u_2' \tag{11.6.4}$$

所有带撇量均表示对 K 系而言的。这时体系的总质量为：

$$M' = m_1' + m_2' \tag{11.6.5}$$

再则，由于 K' 相对于 K 以速度 v 运动，所以对 K 为静止的体系，对 K' 有速度 $-v$。这样，两质点所构成的整个体系对 K' 的速度应为 $-v$。所以动量 P' 又可写成

$$P' = -M'v \tag{11.6.6}$$

利用式(11.6.2)，得到

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2}{u_1} \tag{11.6.7}$$

另一方面，由式(11.6.4)及式(11.6.6)，可得

$$m_1' u_1' + m_2' u_2' = -\left(m_1' + m_2'\right) v \tag{11.6.8}$$

即

$$\frac{m_1'}{m_2'} = -\frac{\left(u_2' + v\right)}{\left(u_1' + v\right)} \tag{11.6.9}$$

再由相对论速度合成公式(11.5.9)，有

$$u_1 = \frac{u_1' + v}{1 + v u_1'/c^2}$$

$$u_2 = \frac{v_2' + v}{1 + v u_2'/c^2}$$

将此代入式(11.6.9)，得

$$\frac{m_1'}{m_2'} = -\frac{1 + v u_2'/c^2}{1 + v u_1'/c^2} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

再用式(11.6.7)

$$\frac{m_1'}{m_2'} = \frac{1 + v u_2'/c^2}{1 + v u_1'/c^2} \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

即

$$\frac{m_1'/m_1}{m_2'/m_2} = \frac{1 + v u_2'/c^2}{1 + v u_1'/c^2} \tag{11.6.10}$$

注意下列公式

$$\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{\left(u_1 + v\right)^2}{c^2\left(1 + v u_1/c^2\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - u_1'^2/c^2}}{1 + v u_1'/c^2}$$

即
$$1+\frac{vu_1'}{c^2}=\frac{\sqrt{1-u_1'^2/c^2}}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

类似地

$$1+\frac{vu_2'}{c^2}=\frac{\sqrt{1-u_2'^2/c^2}}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

将上两式代入式 (11.6.10)，得到

$$\frac{m_1'/m_1}{m_2'/m_2}=\frac{\sqrt{1-u_1^2/c^2}/\sqrt{1-u_1'^2/c^2}}{\sqrt{1-u_2^2/c^2}/\sqrt{1-u_2'^2/c^2}} \tag{11.6.11}$$

这就是利用相对性原理导出的，对于任意两个质点的对 K 及 K' 的质量及速度之间必须保持的关系。在上式中含下标 1 及 2 各量，以及带上撇及不带撇各量的对称位置是很明显的，只要我们取质点的质量与其速度间有如下关系，就可满足式(11.6.11)

$$m=\frac{\alpha}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

其中 α 为常数。为了确定常数 α，我们利用当速度 u 小时，m 应趋于牛顿力学中所用的质量，即静止质量 m_0，所以应有 $\alpha=m_0$，故

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{11.6.12}$$

这是相对论力学的重要结论之一。即质点的质量并不是不变的量，而是与质点的运动状态有关的，质点速度越大，它的质量越大。严格说只有当速度为零时，质量才等于静止质量，实际上只要 $u\ll c$，就有 $m\approx m_0$，这就是牛顿运动方程中把质量看作常量的根据。

11.7 质 能 关 系

本节再讨论相对论力学的另一个重要结论。我们仍从相对论的质点运动方程(11.6.1)出发。注意其中质量是速度的函数式〔(11.6.12)〕，所以

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u}) \\ &= m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{11.7.1}$$

其中 $\mathbf{u}$ 为质点速度矢量。外力 $\mathbf{F}$ 作的功仍应等于质点动能的增加，即

$$\Delta E = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$$

利用式(11.7.1)，上式化为

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int_1^2 m\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \int_1^2 m\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{u} + \int \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 m\,\mathrm{d}u^2 + \int_1^2 u^2\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{11.7.2}$$

其中 1 及 2 分别表示初始及终了两状态。根据式(11.6.12)，可得

$$u^2 = c^2\left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right) \tag{11.7.3}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}m} = -\frac{2m_0^2c^2}{m^3} \tag{11.7.4}$$

将式(11.7.3)、(11.7.4)代入式(11.7.2)，得到

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \int_1^2 m \frac{m_0^2 c^2}{m^3}\,\mathrm{d}m + \int_1^2 c^2\left(1-\frac{m_0^2}{m^2}\right)\mathrm{d}m \\
&= \int_1^2 c^2\,\mathrm{d}m
\end{aligned}
$$

即

$$\Delta E = c^2 \Delta m \tag{11.7.5}$$

此式表明能量的变化与质量的变化之间有简单的比例关系。它意味着能量与质量本身之间存在着简单的比例关系，即

$$E = mc^2 \tag{11.7.6}$$

当然，如果在式(11.7.6)中附加以任何常数，仍能导致式(11.7.5)，写出式(11.7.6)，即相当于取该常数为零。按照式(11.6.12)，式(11.7.6)还可写成

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{11.7.7}$$

如果展开成 $\dfrac{u^2}{c^2}$ 的幂级数，则

$$E = m_0 c^2\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{u^4}{c^4} + \cdots\right\} \tag{11.7.8}$$

当 u 小时，忽略掉所有较高级项，只保留前两项，得到

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 \tag{11.7.9}$$

上式第一项是常数，第二项是质点动能项。在速度较大时，动能已不能仅由 $\dfrac{1}{2}m_0 u^2$ 来表示，而应考虑 $\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{m_0 u^4}{c^2}$ 等修正项。特别应注意的是，按式(11.7.6)，当质点速度为零时，它的能量并不为零，而是等于

$$E = v_o c^2 \tag{11.7.10}$$

也就是说，即使质点没有运动，只要它的静止质量不为零，它就已经具有能量。这个能量与静止质量成正比。这个重要的论断已被大量的实验直接证实了。

思 考 题

1. 在我们已知道的自然界中的各种力之中，你能找出哪种力是距离越大，作用越强？

2. 如果 K 系到 K' 系是洛伦兹变换，K' 系到 K'' 系也是洛伦兹变换，问 K 系到 K'' 系是什么变换？

3. 求式(11.6.9)的反变换式，即从 K 系的速度求 K' 系的速度。

4. 一根细长杆 l 与 x 轴平行，并以 x 轴为轴线作匀速率转动。设 K' 系为沿 x 轴作匀速 v 运动的坐标系，问在 K' 系中观测，这长杆将是什么样子？它怎样运动？

5. 铁路管理局经过严格检查，某条平直铁路上沿途各站的钟都对准了。但是，在飞快地奔驰的列车上的旅客们看来，钟并没有对准。他们经过测量，得出结论："看来沿途的钟不准，车前方的钟太快了，而车后的钟却太慢了。你认为旅客们的意见是否正确？为什么？

习 题

1. 宇宙射线中的 μ 子，以速率 $v = 0.99c$ 向地面射来。若 μ 子在它为静止的参考系中，寿命 $\tau_0 = 2.22 \times 10^{-6}$ 秒。试问：地面上的观察者测得 μ 子的平均寿命 τ 为多少？

2. 在某一惯性参考系 K 看来，物体 A 以匀速率 $v_A = 0.8c$ 沿 x 轴正向运动，物体 B 以匀速率 $v_B = 0.6c$ 沿 x 轴的负方向运动。在 A 看来，B 的速度是多少？

3. 一直尺，相对于 K' 为静止，长为 l'，并且直尺放在与 x' 轴夹角为 θ' 的方向上。试证明：对于 K 中的观察者，直尺的长

度及与 x 轴的夹角分别为

$$l = l'\left[\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cos\theta'\right)^2 + \sin^2\theta'\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

K 系与 K' 系的定义与图11.1同。

4. 如果质点在 K' 系的 $x'y'$ 平面中运动，其速度矢量与 x' 的夹角为 θ'。试证明：对于 K，质点的速度矢量与 x 轴的夹角 θ 为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u'\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta'}{v+u'\cos\theta'}$$

K 系与 K' 系的定义与图11.1同；上式中 u' 为质点对 K' 系的速度，$u'_x = u'\cos\theta', u'_y = u'\sin\theta'$。

5. 设有一车，以匀速率 $v_0 = 100$ 公里/秒作直线运动。

(1) 在车上以速率 $v_1 = 60$ 公里/秒向前投一球，按伽利略变换计算，站在路边的观察者看来，球的速度是多少？

(2) 在车上以速率 $v_1 = 60$ 公里/秒向后投一球，按伽利略变换计算，站在路边的观察者看来，球的速度是多少？

(3) 对于上述两种情况，用狭义相对论的速度合成公式，分别求出结果。

6. 一高速列车以 $0.6c$ 的速率沿平直轨道运行，车上有 A、B 两人，相距 10.0 米，A 在车的后部，B 在车的前部。当列车通过一站台的时候，突然站台上的人看到 A 先向 B 开枪，过了 12.5 毫微秒，B 又向 A 开枪。因而站台上的人作证：这场枪战是由 A 挑起的。假如你是车中的乘客，你看见的情况是怎样的？

7. 一个电子 (其静止质量为 $m_2 = 9.11\times10^{-31}$ 公斤) 以 $0.99c$ 的速率运动，试问：

(1) 它的总能量是多少？

(2) 按牛顿力学算出的动能和按相对论力学算出的动能各为多少？它们的比值是多少？

8. 假设一个火箭飞船的静质量为 8,000 公斤，从地球飞向金星，速率为 30 公里/秒。估算一下，如果用非相对论公式计算它的动能，则少算了多少焦耳？用这能量，能将飞船从地面升高多少？

9. 一个质数为 42 的静止粒子，蜕变成两个碎片，其中一个碎片的静质量数为 20，以速率 $3c/5$ 运动。求另一碎片的动量 $\boldsymbol{P}$，能量 E、静质量 m_0(1 原子质量单位 $= 1.66\times10^{-27}$ 公斤)。

10. 在聚变过程中，四个氢核转变成一个氦核，同时以各种辐射形式放出能量。假设一个氢核的静止质量为 1.0081 原子质量单位，而一个氦核的静止质量为 4.0039 原子质量单位。计算四个氢核聚变成一个氦核时所释放出来的能量。

11. 二极真空管是由一个圆筒形阳极包围一个较小的柱形阴极构成。一个电子带着 4.8×10^{-16} 焦耳的位能 (相对阳极而言) 并以初速率 $v_0 = 0$ 离开阴极表面。设这电子不与任何空气分子碰撞，并且万有引力可略去不计。问：

(1) 当电子撞击阳极时，它的动能有多大；

(2) 电子到达阳极时的速率 v 等于多少？

(3) 如果用经典公式计算电子动能，误差有多大？

12. 静止的电子偶淹没时产生两个光子，如果其中一个光子再与另一个静止电子碰撞，求它能给予这电子的最大速度。

第十二章

动力学与非惯性参考系

12.1　非惯性参考系和惯性力

在上章中，我们指出规律的形式是绝对的，即对于所有的惯性系，动力学方程的形式是一样的。本章讨论非惯性参考系的问题。所谓非惯性系是指相对于惯性系作变速运动的参考系。在非惯性系中，惯性定律及牛顿第二定律不再成立。例如，加速向前开动的火车或汽车，就是个非惯性系。在车中，虽然没有看到任何人或物推我们，但却会不由自主地向后倾倒。这种相对于车厢的加速度是怎样来的呢？这是来自加速度的相对性。在第二章中曾指出，如果物体 A 对参考系 K 为静止或匀速运动，有另一参考系 K' 相对于 K 以加速度 $\mathbf{a}_0$ 运动，则对 K' 而言，A 作加速运动，其加速度为 $-\mathbf{a}_0$，这就是向后倾倒的原因。在非惯性系中出现了不与物体间作用力相联系的加速度，似乎说明了非惯性系对于讨论动力学问题是复杂的、不恰当的，似乎说明我们永远不要选择这种参考系来讨论力学问题。遗憾的是，在许多情况，我们不得不选择这种“不恰当”的参考系，而且在实际工作中，这种“不恰当”的参考系，却是最方便的参考系。地球往往是在实际工作中不得不采用的参考系，而严格说来它是一个非惯性系。因而，讨论有关非惯性系的特定问题，是非常必要的。

我们仍以匀加速运动的车厢为例，设其加速度为 $\mathbf{a}_0$(图12.1。如果物体 A 相对于车厢的加速度为 $\mathbf{a}'$,则按加速度合成公式(2.4.6),

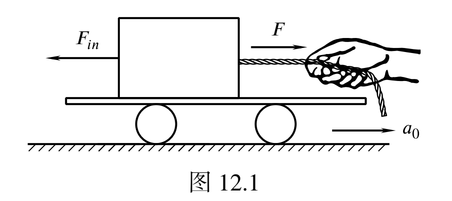


图 12.1

物体 A 相对于地面参考系的加速度 $\mathbf{a}$ 为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \tag{12.1.1}$$

地面参考系近似于惯性参考系，牛顿第二定律成立，所以作用在 A 上的外力 F 应为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0\right) = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_0$$

其中 m 为 A 的质量。上式可以写成

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{P} - m\mathbf{a}_0 \tag{12.1.2}$$

式(12.1.2)清楚地表明，在车厢参考系中，质量与加速度之积 $m\mathbf{a}'$ 并不等于作用力 $\mathbf{F}$，相差值 $-m\mathbf{a}_0$ 反映了车厢参考系的非惯性性质。为了使得在车厢参照系中牛顿第二定律形式上仍然适用，我们把 $-m\mathbf{a}_0$ 设想为作用在物体上的一个力，称为惯性力，写为

$$\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_0 \tag{12.1.3}$$

这样，式(12.1.2)就可以写成

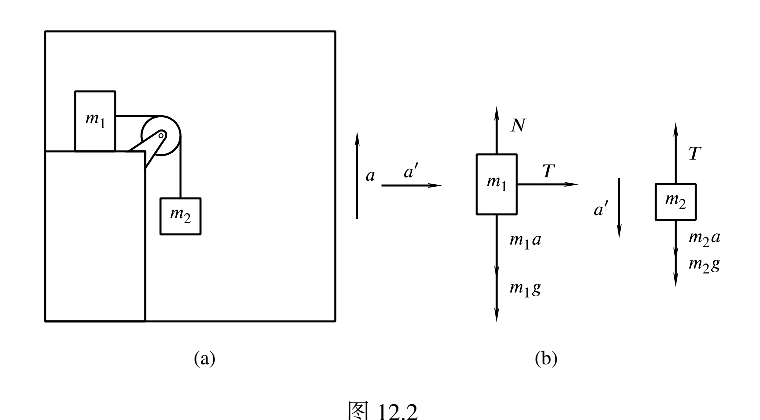
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} \tag{12.1.4}$$

也就是说作用在物体上的总力，是真实的外力 $\mathbf{F}$ 与设想的惯性力 $\mathbf{F}_{in}$ 之和。式(12.1.4)在形式上与牛顿第二定律是一样的。换言之，在非惯性系中，若计及惯性力，那么，物体的运动依然满足牛顿第二定律。如，当车加速时人会向后倾倒的现象，现在可以解释为人受了惯性力 $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_0$ 的作用，$\mathbf{F}_{in}$ 的方向与 $\mathbf{a}_0$ 相反，故人被向后拉。

引入了惯性力的概念，就使牛顿第二定律不仅适用于惯性系，而且也适用于非惯性系。应该再次强调，惯性力 $\mathbf{F}_{in}$ 的来源是参

考系的非惯性性质，与电磁力、摩擦力等等物体之间的相互作用是有区别的。从原则上说，只要我们选择惯性系，就可以消除惯性力，而物体之间的真实作用力，是不能用这样的方法来消除的。

我们看到，对于非惯性系，关键在寻找惯性力的正确表达式，然后把真实力与惯性力的矢量和作为总力，就可以在非惯性系中应用牛顿第一定律和第二定律来处理力学问题。关于第二定律上面已经作了讨论。所调第一定律适用，是说当质点在某非惯性系中所受总力 (包括真实力和惯性力) 为零时，对该非惯性系来说，该质点静止或作匀速直线运动。而牛顿第三定律是讨论两个物体间真实相互作用力的性质，惯性力是虚拟力，来源于参考系的非惯性性质，并非物体之间的真实的相互作用，所以对非惯性系来说，第三定律一般不再适用。



(a)　　(b)

图 12.2

【例 1】　图12.2(a)中升降机内物体 $m_1 = 100$ 克，$m_2 = 200$ 克，用滑轮连接。升降机以加速度 $a = g/2 = 4.9$ 米/秒^2 上升。求

(1) 在机内的观察者看到这两个物体的加速度是多少?

(2) 在机外地面上的观察者看到的加速度又是多少?

解　(1) 在机内观察，因为升降机以加速度 $\mathbf{a}$ 上升，故此系统

是非惯性系。惯性力是 $-m\mathbf{a}$。由图12.2(b)知各物体的动力学方程为：

对 m_2 有 $m_2g + m_2a - T = m_2a'$

对 m_1 有 $T = m_1a'$

$$N - m_1g - m_1a = 0$$

可解得

$$\begin{aligned} N &= \frac{3}{2}m_1g \\ &= 14.7 \times 10^4 \text{达因} \\ a' &= \frac{3m_3g}{2\left(m_1 - m_2\right)} \\ &= 9.8 \text{ 米/秒}^2 \\ T &= m_1a' \\ &= 9.8 \times 10^4 \text{ 达因} \end{aligned}$$

(2) 在地面上的观察者，是在惯性系中观察，不存在惯性力，只是加速度的合成问题。各物体的动力学方程为

对 m_2 有 $T - m_2g = m_2a_2 = m_2\left(a - a'\right)$

对 m_1 有 $T = m_1a'$

$$N - m_1g = m_1a$$

解之得

$$\begin{aligned} N &= \frac{3}{2}m_1g \\ &= 1.47 \times 10^4 \text{ 达因} \\ a' &= \frac{3m_2g}{2\left(m_1 + m_2\right)} \\ &= 9.8 \text{ 米/秒}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T &= m_1 a' \\
&= 9.8 \times 10^4 \text{ 达因} \\
a_2 &= a - a' \\
&= \frac{1}{2}g - \frac{3m_2 g}{2(m_1 + m_2)} \\
&= -4.9 \text{ 米/秒}^2 \\
a_1 &= \sqrt{a^2 + a'^2} \\
&= 10.8 \text{ 米/秒}^2 \\
\theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{4.9}{9.8} \\
&= 26°35'
\end{aligned}
$$

所以，在地面惯性系看来，m_2 仍然是向着地面下落，但加速度是 $a_2 = 4.9$ 米/秒^2，而不同于在非惯性参考系的升降机内所见到的加速度 $a' = 9.8$ 米/秒^2。在地面观察，m_1 不是象机内观察到的那样作水平直线运动，而是沿与水平成夹角 $\theta = 26°35'$ 的方向，作 $a_1 = 10.8$ 米/秒^2 的匀加速运动。

12.2 转动参考系

现在，我们选择一个相对于惯性系作转动运动的物体为一新的参考物。这样一个参考系称为转动参考系，也是一种非惯性系。因为地球参考系是个转动参考系，所以关于转动参考系的问题有特别的实际兴趣。如上节指出，只要引入相应的惯性力，则牛顿第二定律可以照用。关于转动参考系的惯性力，是个较复杂的问题。下面就几个特定情况来讨论。

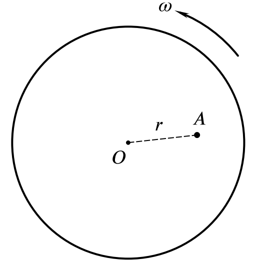


图 12.3 转动参考系

如图12.3所示，图中圆盘以角速度 ω 对一惯性系 K 作匀速转动。如果质量为 m 的质点 A 对于圆盘参考系 K' 是不动的，即在 K' 系看来 A 是静止的，则应有

$$\mathbf{F}_{总} = 0$$

或
$$\mathbf{F}_{真} + \mathbf{F}_{in} = 0 \tag{12.2.1}$$

在惯性系 K 中看来，质点 A 是作以 r 为半径的匀速圆周运动，它具有向心加速度 $\omega^2 r$，作用在 A 上的真实力是向心力 $\mathbf{F}_{真}$，其大小应为

$$|\mathbf{F}_{真}| = F_{真} = m\omega^2 r \tag{12.2.2}$$

在牛顿力学中，我们总是认为，对不同参考系而言，真实力和质量是不变的，故由式(12.2.1)和式(12.2.2)得知，在 K' 中，A 所受的惯性力 $\mathbf{F}_{in}$ 的大小应为

$$F_{in} = m\omega^2 r \tag{12.2.3}$$

其方向应在离心的方向。因此，称 $\mathbf{F}_{in}$ 为惯性离心力。

惯性离心力的作用在日常生活中是熟悉的。当汽车转弯时，乘客感到向外甩。这个现象在地面上的人看来，是因为当汽车转弯时，乘客仍按惯性定律保持着直线运动，结果乘客相对于车厢的运动就是向外甩出。而在车厢参考系看来，乘客的外甩是由于惯性离心力的作用。

A v
O
ω

图 12.4 转动参考系中的直线运动

再讨论另一个特殊情况：质量为 m 的质点 A 相对于圆盘参考系 K' 沿着半径方向作匀速直线运动 (图12.4)，根据牛顿力学，从 K' 系看来，

$$\mathbf{F}_{真} + \mathbf{F}_{in} = 0$$

或
$$\mathbf{F}_{in} = -\mathbf{F}_{真}$$

因此，要求出 A 所受的惯性力 $\mathbf{F}_{in}$，只要求得真实力 $\mathbf{F}_{真}$ 就可以

了。而 $\mathbf{F}_{真}$ 在不同参考系中是相同的，所以我们可在惯性系 K 中求 $\mathbf{F}_{真}$。在 K 中看来，

$$\mathbf{F}_{真} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$ 是质点 A 相对于 K 的加速度。所以只要求出加速度 $\mathbf{a}$，就可推知

$$\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}$$

现在来求 $\mathbf{a}$, 假定在 t 时刻圆盘相对 K 系的位置如图12.5(a)所示，质点 A 相对圆盘参考系 K' 的速度是 $\mathbf{v}$，而圆盘 A 处相对 K 的速度是 $\mathbf{v}_c$，其大小为 $v_c = \omega r$。按速度合成公式，质点 A 相对于 K 的速度是 $\mathbf{v} + \mathbf{v}_c$。在 $t + \Delta t$ 时，圆盘转动到图12.5(b)所示的位置，转过角度 $\Delta\varphi = \omega\Delta t$，这时质点 A 相对于 K' 的速度是 $\mathbf{v}'$，由于 A 相对于圆盘是匀速直线运动，所以 $\mathbf{v}'$ 在径向 $\mathbf{r}'$ 的方向，其大小为 $v' = v$；现在圆盘 A 处的速度是 $\mathbf{v}_c'$，其大小为 $v_c' = \omega r', r' = r + v\Delta t$，故质点 A 相对于 K 的速度为 $\mathbf{v}_c' + \mathbf{v}'$。

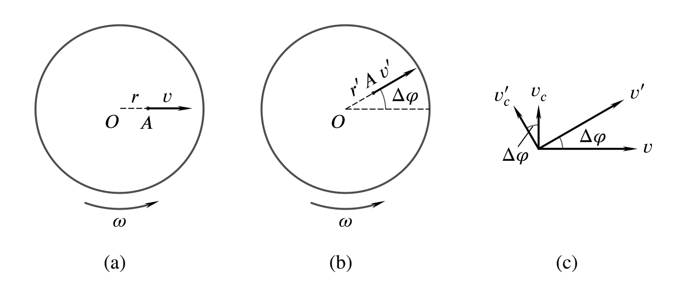


图 12.5 推求科里奥利力

根据定义，质点 A 在 K 中的加速度为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(\mathbf{v}_c' + \mathbf{v}_r) - (\mathbf{v}_c + \mathbf{v})}{\Delta t}$$

下面我们将 a 分解成平行于 $\mathbf{v}$ 方向的分量 $a_{//}$ 及垂直于 $\mathbf{v}$ 的分量 $a_{\perp}$。根据图12.5(c)，有

$$
\begin{aligned}
a_{//} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v'_{c//}+v'_{//}-v_{c//}-v_{//}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-v'_c\sin\Delta\varphi+v'\cos\Delta\varphi-0-v}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\omega(r+v\Delta t)\Delta\varphi+v-v}{\Delta t}\\
&= -\omega^2 r
\end{aligned}
\tag{12.2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\perp} &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{v'_{c\perp}+v'_{\perp}-v_{c\perp}-v_{\perp}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{v'_c\cos\Delta\varphi+v'\sin\Delta\varphi-v_c-0}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega(r+v\Delta t)+v\Delta\varphi-\omega r}{\Delta t}\\
&= +2v\omega
\end{aligned}
\tag{12.2.5}
$$

$a_{//}$ 式中的负号，表示加速度方向与 $\mathbf{v}$ 方向相反，指向圆心。$a_{\perp}$ 式的正号，表示它的方向垂直于 $\mathbf{v}$ 向上。现在分别讨论与 $a_{//}, a_{\perp}$ 所相应的惯性力。

与 $a_{//}$ 相应的惯性力 $F_{//in}$ 大小为 $m\omega^2 r$，方向平行于 $\mathbf{v}$，也就是平行于 $\mathbf{r}$。这就是前面讨论过的惯性离心力。惯性离心力的大小决定于质点距盘心距离 r，方向总是离心。无论质点相对于圆盘运动还是静止，它所受到的惯性离心力都是一样的。

与 $a_{\perp}$ 相应的惯性力 $F_{\perp in}$ 的大小是 $2mv\omega$，如按图12.5(c)的方位，这个力的方向是垂直于 $\mathbf{v}$ 向下。这种新类型的惯性力，按照它的发现者，被命名为科里奥利力。科里奥利力的特点是与质点对圆盘参考系 K' 的运动速度有关，当 $\mathbf{v}=0$，即相对于 K' 静止时，科里奥利力为零，所以只有对 K' 运动着的物体才感受到科里奥利力的作用。再则，科里奥利力与 $\mathbf{v}$ 的方向垂直，总是力图改变质点在 K' 系中的运动方向。

可以一般地证明，在转动参考系中，只有惯性离心力及科里奥利力这两种类型的惯性力。惯性离心力总可以表示为

$$\mathbf{F}_{离} = m\omega^2\mathbf{R} \tag{12.2.6}$$

其中矢量 $\mathbf{R}$ 的大小为质点 A 到转轴的距离，方向由转轴沿径向指向质点 M。科里奥利力总可以表成

$$\mathbf{F}_c = 2m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{12.2.7}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是质点 A 相对于 K' 的速度；$\boldsymbol{\omega}$ 是参考系 K' 的转动角速度矢量。

地球是一个转动参考系，上述两种惯性力的效果在地球上都有反映，有很大的实用意义。我们首先看一种简单情况，物体相对于地球静止。由于地球是一个以 ω 匀速转动的参考系，质量为 m 的静止在地球表面的物体，在地球参考系观察者看来，必定受到惯性离心力 $\mathbf{F}_{离}$，其大小为 $\omega^2 R$，R 是物体到地球自转轴的距离，力的方向为沿径向 R 向外，如图 12.6 所示。显然，当纬度不同时，$\mathbf{F}_{离}$ 不同，两极处最小为零；赤道处最大。地球上的自由落体要受到 $\mathbf{F}_{离}$ 和地球引力 $\mathbf{F}_g$ 两方面的作用。很容易看出，在不同纬度，上述两力的合力大小是不等的，因此，即使地球真是均匀的球体，各处的重力加速度也并不相同，极区大，赤道处小。惯性离心力是造成各处 g 不等的重要原因之一。此外，我们习惯说，用线悬挂一物体，则当相对于地球静止时，悬线指向地心。其实，这个说法也并不严格。绳应静止在 $\mathbf{F}_{离}$ 和 $\mathbf{F}_g$ 的合力 $\mathbf{F}$ 的方向。从图12.6 上可以看出，$\mathbf{F}_g$ 指向地心，而 $\mathbf{F}$ 并不指向地心，且这种偏离在不同纬度上有不同值。

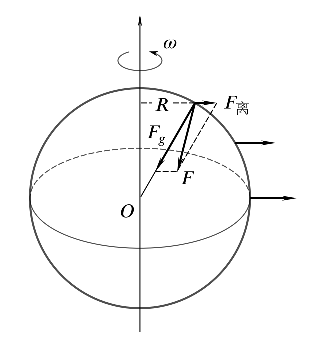


图 12.6　地球上物体所受到的惯性离心力

现在讨论科里奥利力的一些效应。当质量为 m 的质点相对于地球以 $\mathbf{v}$ 运动时，必定要受到科里奥利力的作用，它由式 (12.2.7) 所描写。由式(12.2.7)不难断定，无论质点向哪方向运动，在北半球，$\mathbf{F}_c$ 总是指向质点行进方向的右侧；而在南半球，$\mathbf{F}_c$ 总是指向质点行进方向的左侧。北半球的河流总是冲刷右岸，使河床大都是右岸陡，左岸坡单行的火车轨道，总是右边的铁轨比左边的铁轨要磨损得重些。上述诸现象在南半球则相反，这些都是科里奥利力的作用。地球上很多左右不平衡的现象都与科里奥利力有关。

科里奥利力的存在，是对地球相对于惯性系有转动的一个严格的物理证明。直接证明地球参考系中存在科里奥利力的物理实验是佛科摆。佛科摆是一个普通的单摆，只不过顶端的连接装置保证悬点能在任何方向上同样自由地摆动。如图12.7 所示。如果地球是惯性系，不论摆动多久，摆总是在同一个平面内，因为不存在侧向力。如果地球是转动着的非惯性系，摆锤将受到侧向的科里奥利力。在北半球，这个力总是指向右侧。图12.7 是由上向下看的摆锤的轨道，当摆锤从 1 走向 2 时，不是沿直径到 2′，而是向右偏到达 2，从 2 向 3 时，不是沿直径到达 3′，而是到达 3，如此等等，就会使摆平面转动。1851 年，佛科在巴黎的伟人祠内大圆屋顶下公开表演了这个实验，看到了摆平面的转动。由摆平面的转动，我们能严格地求得地球相对惯性系的转动角速度。可

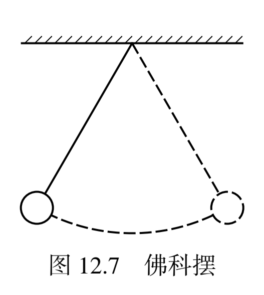


图 12.7　佛科摆

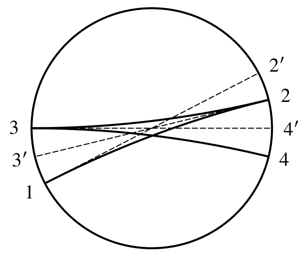


图 12.8　佛科摆锤轨道

以说，直到这时，才算真正把亚里士多德的地心说与哥白尼的日心说之争分清了。

【例 2】　如图12.9(a)所示，用长为 l 的绳将质量为 m 的小球悬挂起来，令物体以匀速率 v 沿一水平圆周运动。物体运动时，绳与竖直方向的夹角 θ 不变。这个装置称为圆锥摆。试求此圆锥摆的周期 T。

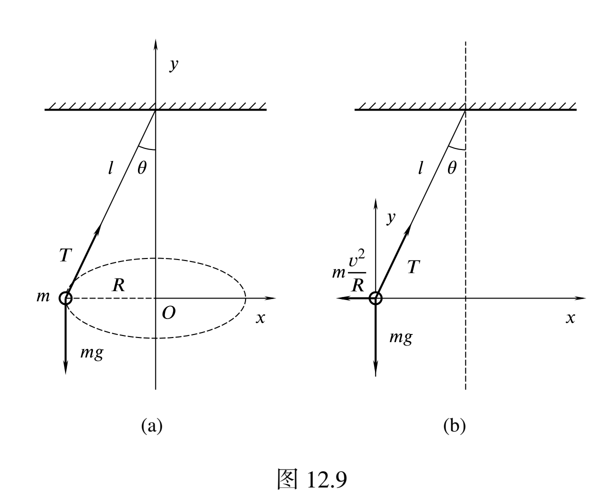


图 12.9

解　可以从两种参考系来解这个题。一为地面惯性系，在此，摆锥受两个力的作用，即张力 T 及重力 mg；二是随 m 一起运动的参考系，此为旋转系，在此，摆锤受三个力的作用，即张力 T、重力 mg 及惯性力 mv^2/R。在惯性系中，m 作圆周运动；在旋转系中，m 静止不动。用两种观点可解出同样的结果。下面分别求解

(1) 惯性系解法。取坐标如图12.9(a)，它是一个圆锥摆。故有

$$T_y = T\cos\theta = mg$$

$$T_x = T\sin\theta = mv^2/R$$

$$R = l\sin\theta$$

将上三式联立求解，得

$$v = \sqrt{Rg\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

周期则为

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

(2) 非惯性系解法。此时处理的是一个静力平衡的问题，坐标原点取在 m 上，x 与 R 重合，oy 是竖直方向，如图12.9(b)所示。张力、重力 mg 及惯性力 mv^2/R 三力平衡即为

$$T\cos\theta = mg$$

$$T\sin\theta = mv^2/R$$

$$R = l\sin\theta$$

结果与上面相同。

【例 3】 使长为 l 的细绳一端固定在以匀速转动的水平光滑圆盘在中心 O 点上，绳的另一端系一质量为 m_0 的小球。欲使小球在盘上相对于盘以匀速率 v 作圆周运动，旋转方向与盘相反。问绳中的张力 T 多大？

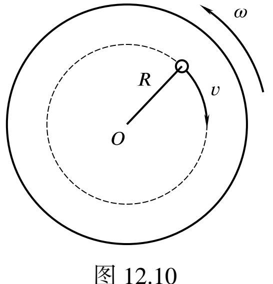


图 12.10

解 (1) 惯性系解法。小球受绳的张力 T 是向心力，使小球产生向心加速度，此为相对于地面的绝对加速度 $a_{绝对}$：

$$T_T = ma_{绝对}$$

$$a_{绝对} = \frac{v^2_{绝对}}{l}$$

因为 $\mathbf{v}_{绝对} = \mathbf{v}_{相对} + \mathbf{v}_{牵连}$

所以 $v_{绝对} = v - l\omega$

$$a_{绝对} = \frac{(v - l\omega)^2}{l} = \frac{v^2}{l} + l\omega^2 - 2v\omega$$

$$T = m\frac{v^2}{l} + ml\omega^2 - 2mv\omega$$

(2) 非惯性系解法。小球受到绳的张力与惯性力的合力为向心力，使它作匀速率 v 的圆周运动。此时要用到在非惯性系中的相对加速度。

在旋转坐标系中，作匀速圆周运动的物体受到两个惯性力的作用，即惯性离心力 (f')

$$-m\frac{v_{牵连}^2}{l} = -ml\omega^2$$

和科里奥利力 (f'')

$$2mv\omega$$

所以 $\mathbf{T} + \mathbf{f}' + \mathbf{f}'' = m\mathbf{a}_{相对}$

即 $T + 2mv\omega - ml\omega^2 = m\dfrac{v^2}{l}$

故 $T = m\dfrac{v^2}{l} + ml\omega^2 - 2mv\omega$

与上述结果相同。

12.3　对绝对时空的批评

前两节在讨论惯性力时，我们强调惯性力是“虚拟力”，即它并不是物体之间的相互作用，而是由所选择的参考系引起的。这

个性质使我们可以用实验方法来区分哪个参考系是惯性的，哪个是非惯性的。这种区分方法首先是牛顿提出来的。

我们已经讲过，牛顿认为绝对空间是最基本的参考系，是惯性参考系。因此，在牛顿力学中的一个基本问题是判断哪一个参考系是绝对空间参考系。在物理学中，要求每一个概念都能与实验有直接或间接的明确联系，这样我们才能用实验方法来检验这些概念。完全不能由实验加以规定的概念，是玄学的，而不是物理学的。这个原则对于绝对空间当然也不能例外。牛顿在他的理论之始就讨论如何用实验方法来规定绝对空间或判定绝对空间。由于相对性原理的存在，所以，不存在绝对速度，即原则上无法测量物体相对于绝对空间的速度。因此，不能指望用测定速度的方法来证实绝对空间的存在。但是，用测定加速度的方法却是可以判断绝对空间的存在的。因为，以绝对空间为参考系时，不存在惯性力所引起的加速度，所以至少存在惯性力的参考系不是绝对空间。在这个意义上，我们至少部分地能用实验方法来规定哪个是绝对空间。

牛顿曾用旋转水桶来形象地表述上述观念，他写道：

> “如果把一个桶吊在一根长绳上，将桶旋转多次而使绳拧紧，然后盛上水，并使桶与水一道静止不动。接着在另一力的突然作用下，水桶朝反方向旋转因而当长绳松开时，水桶将继续这种运动若干时间，水面最初会与桶开始旋转以前一样是平的；但此后桶逐渐把它的运动传递给水，使它明显旋转起来，并逐渐离开中心向桶的边缘升起，形成一个凹面……起初当水在桶中的相对运动最大时，这种相对运动并没有使水产生离开轴心的任何倾向，水没有显示出四周运动并沿桶壁上升的趋势，而保持着水平。所以它的真正圆运动尚未开始。但是后来水的相对运动减小，水就因此趋向桶的边缘而在那里

上升。这证明它是在企图离开转轴；这种趋向说明水的真正的圆运动在不断增大，一直到水在桶内处在相对静止时达到其最大数量为止……”

这就是说，至少对于转动，我们可以利用水面变四平来区分哪些转动是绝对的，哪些则不是。只当水面变凹时，才表明它相对于绝对空间有转动反之，当水面为平坦时，它就没有绝对的转动 (图12.11) 这就是牛顿给绝对空间所规定的实验判别法。狭义相对论的时空观虽然与牛顿的时空观有许多根本性的不同，但在加速度具有绝对性这一点上，两种体系是相同的。

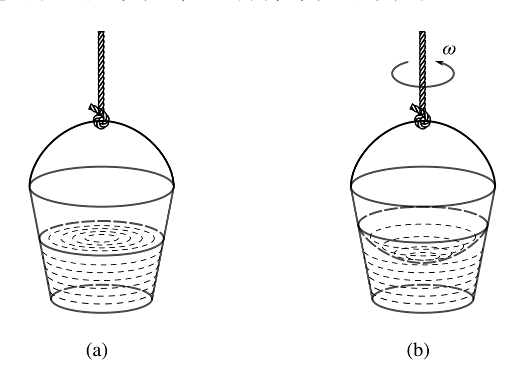


图 12.11 牛顿的水桶实验

牛顿的水桶判别法受到反对绝对时空的人的批评。最有力的批评是马赫给出的。马赫在《发展中的力学》一书中写道：

“如果我们说一个物体 K 只能由于另一物体 K 的作用而改变它的方向和速度，那么，当我们用以判断物体 K 的运动的其他物体 $A, B, C, \ldots$ 都不存在的时候，我们就根本得不到这样的认识，因此，我们实际上只认识到物体同 A, B, C 的一种关系。如果我们现在突然想忽略 $A, B, C, \ldots$ 而要谈物体 K 在绝对空间中的行为，那么我们就要犯双重错误。首先，在 $A, B, C, \ldots$ 不存在的情况

下，我们就不能知道物体 K 将怎样行动；其次，我们因此也就没有任何方法可以用以判断物体 K 的行为，并用以验证我们的论断。这样的论断因而也就没有任何自然科学的意义。”

根据这种观点，马赫认为牛顿的水桶实验并不表明绝对空间的存在。因为，牛顿的实验谈不上是相对于绝对时空来做的，牛顿水桶周围的宇宙空间里存在着许许多多的物体，原则上说，只有把这些物体全部拿走，才有可能谈得上是牛顿的绝对空间。这样，水面的形式，并不反映水桶是否相对于绝对空间有转动，而是反映水桶相对于地球和其他天体是否有转动。水面变凹，并不是由于绝对转动所引起的，而是由于宇宙间各种物质对相对于它们转动的水桶的作用结果。无论是水桶相对于宇宙间物质进行转动，或者是宇宙间物质相对于水桶在转动，二者结果是一样的，水面都会同样地变凹。因此，水面变凹仅仅能证明水桶与宇宙间其他物质 $(A, B, C, \ldots)$ 间有相对转动而不能证明绝对空间的存在。

我们可以再利用下面的例子简单地表述牛顿和马赫两种观念的差别。夜间，我们站在星斗之下，我们看到满天的星是静止的。这时，我们的两臂自然地下垂。当我们突然转动身体时，我们看到两件事同时发生了，一是星星开始旋转，二是我们的两臂也被甩向外边。牛顿认为这两件事是没有直接关系的，而是由于存在第三者—绝对空间，相对于绝对空间的转动引起惯性离心力，是绝对空间的存在决定了两臂被甩开。相反，马赫认为不存在这个想象中的第三者。关键是上述同时看到的两种现象之间有直接的关系。是转动的星的体系决定了两臂的甩开。马赫主张建立一种更正确的动力学，它应当能说明转动星体如何作用到手臂上产生了牛顿体系中的“惯性力”。

总之，在马赫的观念中，所谓惯性力并不是来自时空几何度量系的“虚拟”力，而同样是宇宙间物体之间的相互作用。水面

的变凹，手臂的甩开，是由于旋转着的宇宙天体对于水及手臂作用的结果。

到此，两种观点有了很大的分歧，但还没有多大实质上的差别。因为两种观点计算水面变凹的程度是一样的，只是解释不同。马赫的观点认为，惯性力并不是源于抽象的绝对时空，而是有物质性的，它是物质间真实的作用力，但究竟是什么样的真实力却不清楚。将此问题更推进一步的是爱因斯坦。他把问题倒过来，看到有些真实力在某种意义上很象牛顿意义下虚拟的惯性力。有这种性质的真实的力就是引力。

由式(12.1.3)、(12.2.3)、(12.2.6)及(12.2.7)看到，惯性力的基本特点是与质点的质量成正此。引力 $F = m\dfrac{GM}{r^2}$ 也有这种特点。其他的基本作用力，如电磁力等，则没有这种特点。因此，在某种意义上就无法区别引力和惯性力。最简单的例子是地球的重力场。在地球表面附近，质量为 m 的质点受到的重力是

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

坐在完全封闭的电梯里的观察者，看到物体以加速度 $\mathbf{g}$ 向下落，如图12.12(a)所示。他认为是物体在地球重力作用下自由下落，电梯里另外一个观察者完全可以认为根本没有地球，是地球以加速度 $-\mathbf{g}$ 在运动，如图12.12(b) 所示。因此，与在伽利略大船里无法判断绝对速度一样，电梯里的观察者也无法判断有没有地球存在；或者说无法判断引力的大小是多少；或者说无法判断绝对加速度是多少。这就是说，在电梯内所有实验无法判断加速度是由引力引起的，还是由惯性力引起的。因此，在这个意义下，引力的作用和惯性力的作用不可区分。这种不可区分性

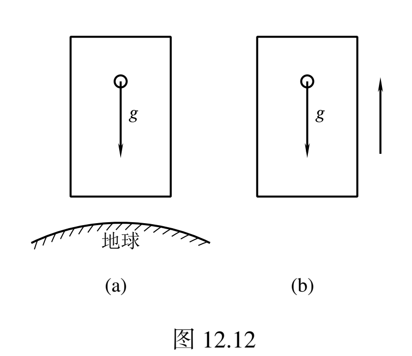


图 12.12

说明在某种意义下两者是一回事。这就是现代的观点。

在牛顿的引力理论中，就已发现引力的几何性，但无法说明其原因。爱因斯坦把伽利略大船的“绝对速度不可测”发展到“绝对加速度不可测”。正是由于这一点，引力相当于某种惯性力，或者说，引力具有惯性力的性质。而惯性力在牛顿意义下是一种完全由时空决定的力，即具有几何性。所以，引力具有几何性。爱因斯坦从这种观点出发，导出新的引力理论一广义相对论。它预言了牛顿引力理论中所没有的一些新现象。事实证明，爱因斯坦的引力理论是正确的，而牛顿的引力理论则不正确。

马赫由“物理概念要求可测”的基本观点出发，对牛顿的绝对时空基本参考系进行批评，进而发展为爱因斯坦的广义相对论。在物理学上，这是物理概念要求有观测基础的一个出色例证。

当时，马赫批评牛顿的绝对时空，曾被很多人反对。因为人的日常生活的直观感觉的确认为时空是绝对的。牛顿写的对绝对时空的描述是人的粗浅感觉的总结。但这种总结是不正确的。我们必须用严格的物理方法来审查它，即这样一种绝对时空到底能不能被测量，直观的感觉有时是错误的，很多人反对马赫的批评，也是自然的事情。但历史证明马赫的这个批评是正确的。

12.4 等效原理

牛顿力学中，真实力和惯性力是完全不同的。马赫的观点是几何性的惯性力，实质上也是一种真实的力。爱因斯坦对引力的研究则认为，在牛顿力学中作为真实力的引力，实质上也就是一种几何性的力。现在我们简单地介绍一下爱因斯坦的基本观点。

首先，假定在某一空间范围中有恒定的引力，即各处的引力加速度都是 g。例如，在地球表面附近，就近似属于这种情况。如

果只有引力，那么，根据式(4.6.7)

$$\frac{m_{惯}}{m_{引}} = 普适常数 = 1$$

所有物体在这个区域中的加速度都完全相同。因此，只要变换到一个新的参考系 K'，K' 相对于 K 系 (即原来地球表面附近) 的加速度为 g，则一切引力效应都被消除了。任何上述物体的运动都没有加速度了。

很容易用公式来表达。在参考系 K 中，牛顿定律是

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{f}_{外}$$

其中 $\mathbf{f}_{外}$ 外表示除引力之外的其他力。对于参考系 K' 来说，加速度 $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{g}$，而其他作用力同前，故有

$$m\left(\mathbf{a}' + \mathbf{g}\right) = m\mathbf{g} + \mathbf{f}_{外}$$

即

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f}_{外}$$

在这个方程中引力不再出现。

现在，参考系 K' 是引力作用下的自由下落参考系。因此，由 $m_{惯}/m_{引}$ 的普适性得出的结论是，在引力的自由下落实验室里，一切力学现象就如同在一个没有引力的惯性系中是一样的。用这个局部范围中的力学现象，我们无法区分引力与惯性力。

接着，爱因斯坦作了更进一步的引伸，他认为，在 K' 系中，不仅一切力学现象就如同在一个没有引力的惯性系中是一样的，而且一切物理现象也是一样的。即在局部范围中，用任何物理现象，我们都无法区分引力与惯性力。

总之，在任何局部范围内，我们总可以找到一种参考系，其中引力不再存在，就如同总可以找到一种参考系，其中惯性力不存在一样。引力的本性就在于引力能在某种参考系中被消除。这就是通常所说的等效原理，它是有关引力的最基本的原理。

等效原理说明引力具有几何性，或“虚拟”性，它的存在与

否，决定于参考系的选择。这种性质，物理学中其他的力并不具有。例如，我们不可能依靠选择参考系而把电磁作用全部消受掉。引力作用下质点运动的几何性，我们曾专门在第四章中讨论过 (见第四章第六节)。

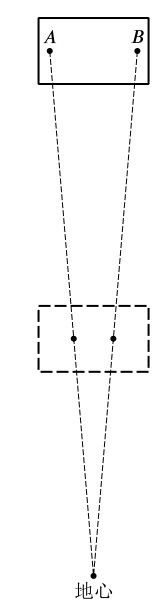


图 12.13 引力的非均匀性

在上述的讨论中，我们一再使用“局部范围”一词。这是因为，实际的引力不可能是处处均匀的。例如，地球附近的引力都指向地心，在地球表面上，不同点的引力的方向是不相同的。引力的大小也随着与地心的距离变化而变化。对于一个刚性的自由下落实验室来说，只有在它的质心那一点上才处于自由下落状态，其余部分严格说来都不处在自由下落状态。如图 12.13，在地面附近的自由下落的实验室中，有两个质点 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，它们的引力加速度都指向地球中心，所以二者不平行，相互之间有相对加速度。这样的相对加速度，是不能通过坐标变换来消除的。因此，原则上说，只有在一个点状的自由下落体系中才能完全消除引力。这就是必须强调“局部范围”的原因。

12.5 局部惯性系

等效原理保证了在任何一个局部范围中，一定存在着引力作用都被消除的参考系。在这种参考系中，一切不受外力作用的质点，都作匀速直线运动。所以，按照惯性系的定义，这种参考系应是一个惯性系。它被称为局部惯性系。

在牛顿力学中，用惯性定律来判断一个参考系是不是惯性系，即在没有外力的环境中，质点应保持惯性运动。但是，由于引力是不可屏蔽的，它无处不在。所谓“没有外力的环境”实质上是一个不存在的环境。因此，将惯性系建立在这种条件上，原则上是缺乏根据的 (尽管可以选择一些“实用”惯性系，近似满足这个条件)。但在局部惯性系中，我们才真正能找到“没有外力的环境”，并且在这个环境中的确仍有惯性定律。因此，局部惯性系更加接近惯性系的本来要求。

局部惯性系比牛顿体系中的惯性系概念更明确也更本质。首先，局部惯性系概念说明，由于引力的存在，只有在局部范围中才能使用惯性系的概念，牛顿体系中所假定的大范围的、甚至全空间统一的惯性系，在原则上是不存在的。

其次，在牛顿体系中我们不清楚为什么惯性系特别“优越”和“独特”，牛顿用绝对空间来解释这一点，而绝对空间本身却是更不清楚的。现在我们看到，局部惯性系之所以特别，因为在这种参考系中引力没有了。所以，对物体运动的描写大大简化。

第三，在牛顿体系中，惯性系是决定于绝对空间的，但它本身却不受物质运动的影响。亦即绝对空间是一个物理实在，因为它会影响物体的动力学性质，决定动力学方程的形式，这是十分强的影响。但是，物质运动却不能对绝对空间有任何影响。这种没有反作用的单向关系，与一般物理规律的特征相当不协调。在局部惯性系体系中，一个作自由落体运动的实验室才是一个局部惯性系，显然，它是决定于物质的分布及运动的。现在我们既不要求局部惯性系相对于某个绝对空间是无加速度的，也不要求各个不同的局部范围上的惯性系之间是无加速度的。例如，围绕地球运行的人造卫星、飞向金星的飞船，它们都是局部惯性系，因为它们都是在纯引力的作用下作自由的飞行，尽管它们之间可能是有加速度的。

总之，引力的作用使大范围的惯性系不再存在，只能有局部的惯性系。引力的作用就在于决定各个局部惯性系之间的联系。在任何一个局部惯性系中，我们是看不到引力作用的，只能在各个局部惯性系的相互关系中才能看到引力的作用。

总结经典力学的发展。在牛顿体系中，工作程序总是这样的：取定一定的参考系用以度量有关的物理量，然后给出力的性质，写出动力学的基本方程。在这个过程中，时空的几何性质 (即由所取的参考系决定) 是不受有关的物理过程影响的。

但是，爱因斯坦的理论表明，引力一方面要影响物体的运动，另一方面又要影响各局部惯性系之间的关系。所以，我们不可能先行规定时空的几何性质，或先行规定参考系。这种先行规定的东西可能并不存在，时空的几何性质本身就是有待确定的东西。这种新的力学，不仅讨论物体之间的相互作用，而且讨论物质运动与时空几何之间的关系，时空本身也成了一种动力学的量。这种力学，就是爱因斯坦所发展的广义相对论。在广义相对论中，空间、时间和物质运动是相互作用着的。这里不但摆脱了牛顿意义下与物质运动无关的绝对时空，也超出了狭义相对论的框架。爱因斯坦曾说：

“空间时间未必能被看作是一种可以离开物理实在的实际客体而独立存在的东西。物理客体不是在空间之中，而是这些客体有着空间的广延。因此，空虚的空间，这个概念就失去了它的意义。”

思　考　题

1. 北半球南北向的河流总是冲刷右岸，是否因为科里奥利力作用在河岸上的结果？

2. 科里奥利力做功吗？别的惯性力做功吗？

3. 如果定义物体的重量为地球作用于物体上的万有引力，并把它叫做物体的“实重”，而把用弹簧秤所测得的物体的重量叫做“视重”。试问：

(1) 视重是否等于实重？分别讨论在赤道上和在两极上的情况。

(2) 一个人在赤道上静止时的视重为 50.00 公斤，他的实重是多少？

(3) 当地球以什么样的角速度自转时，物体在赤道上的视重为零？在此情况下，一日的时间是多长？

4. 设想地球绕自转轴旋转很快，使赤道上物体的视重为零。试问：

(1) 这时地球上其他纬度处物体的视重与实重相差多少？

(2) 此时挂在天花板下的单摆静止平衡的位置指向什么方向？

5. 气象预报中经常把气流的等压线、高压中心、低压中心等用图表示出来。在北半球，高压中心周围的气流是顺钟向的，低压中心周围的气流是逆钟向的在南半球则反之，为什么？

6. 北半球的台风，若从上往下看，台风眼周围的气流是逆钟向的，为什么？

7. 浴池中一池静止的水，拔去塞子，让水缓缓从池中间的泄水口流入下水道，在泄水口附近水流形成涡旋状。在北半球，此涡旋为逆钟向的，为什么？若在南半球，情况又怎样？

8. 一支盛水的圆桶，水中有一弹簧，它的一端固定在桶底的中心，另一端系在一浮标上，浮标浮在水面上并拉伸弹簧，如图12.14所示。开始时，桶、水和浮标都静止不动地放在一个高台子上，然后将支承桶的高台子突然撤掉，使它们作为整体自由竖直下落，问弹簧和浮标将会发生什么运动？

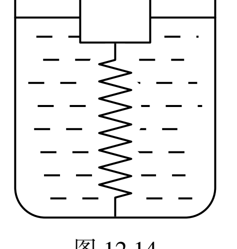


图 12.14

习　　题

1. 用一根线把一物体悬挂在升降机中。

(1) 当升降机以 3.0 米/秒^2 的加速度向上运动时，如果悬线的张力是 10 公斤，问此物的质量是多少？

(2) 当升降机以 3.0 米/秒^2 的加速度下降时，悬线的张力又是多少？

2. 地球 24 小时自转一周，地球半径为 $R = 6378$ 公里。一飞机沿赤道自东向西飞行。以多大速度相对地球表面飞行时，飞机上的东西的视重才正好等于实重？

3. 一质量为 m 的小球用细线悬于一架子上，架子固定在小车上，如图 12.15 所示。在下述诸情况下，求静止平衡时线的方向 (即图中 α 角) 和线中的张力 T。

图 12.15

(1) 小车沿水平面作匀速直线运动；

(2) 小车沿斜面作匀速直线运动，斜面倾角为 θ；

(3) 小车以匀加速度 a 沿水平直线运动；

(4) 小车自由地从倾角为 θ 的斜面上滑下；

(5) 用与斜面平行的加速度 b 把小车沿斜面往上推，斜面倾角为 θ；

(6) 以同样大的加速度 b 把小车从上述斜面上推下去。

4. 在以匀加速度 a 沿平直轨道行驶着的车厢中，有一单摆，摆长为 l，摆锤质量为 m，开始时用手拿住摆锤，使悬线保持竖直且相对车厢为静止，然后突然放手，发生摆动。求：

(1) 悬线偏离竖直线 α 角时，摆锤的位能 U；

(2) 使摆锤偏离 α 角的力所作的功 A；

(3) 悬线的最大偏离角 $\alpha_{\max}$；

(4) 证明 $\alpha_{\max}$ 是放手后摆相对于车厢静止平衡时摆线与竖直线的夹角 α_0 的两倍。

5. 试用非惯性系中的牛顿力学方程解第三章中的例题 7。

6. 一飞机以加速度 **a** 飞行，**a** 与竖直向上方向的夹角为 θ，驾驶员在地面上重为 P 公斤。试求：

(1) 驾驶员作用在座位上的力为多少？

(2) 当 $\theta = 0$ 时，情况如何？

(3) 当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，情况如何？

(4) 当 $\theta = \pi, a = g$ 时，情况如何？

(5) 当 $a = 0$ 时，情况如何？

7. 一轰炸机以 1,000 公里/时的速度俯冲后，即离开俯冲线改沿一竖直圆周路线飞行，速率不变。若飞机在最低点的加速度不得超过 $4g$，求

(1) 竖直圆周的最小半径；

(2) 在圆周路径的最低点，一个 60 公斤重的驾驶员的视重。

8. 一杂技演员表演飞车技术，骑一快速摩托车冲上圆柱形房间的圆壁，沿着房间圆壁上的圆轨道快速行驶，车就不会掉下来。试问：

(1) 设车与壁间的静摩擦系数为 μ_s，房间半径为 R，若将车与人整体视为一质点，v 至少为多大时，演员才不会掉下来？

(2) 设此房间的直径为 $D = 18$ 米，车与人的重心离轮与壁接触点的距离为 $h = 1.0$ 米，$\mu_s = 0.4$，v 至少为多大？

(3) 若车速 $v = 20$ 米/秒，演员与水平面所成的角 α 应为多大？

9. 一圆环平放在水平面上，以匀角速度绕它的几何对称轴旋转，圆周上的速度为 v，证明环中的胁强 (即应力) 为 $\rho v^2/g$。ρ 是单位长度圆环的质量，g 是重力加速度。

10. 试用非惯性系的牛顿力学方程解第三章的习题 27。

11. 一炮弹沿水平弹道 (可近似看成直线) 以 900 米/秒的速度飞行，炮弹是在北纬 60° 向着正北方向距离 18 公里处的目标发射的。若不考虑地球的公转，略去空气阻力，不计惯性离心力，问因地球自转，炮弹打到目标附近时，在水平方向偏离多少？偏向什么方向？

12. 一半径为 R 的水平大圆盘绕通过圆心的竖直线旋转，角速度为 ω。试问：

(1) 站在圆盘中心的人用手枪射击盘边缘上一点 B，子弹速度为 v，问直接对准 B 射击能否射中？若不能应给什么样的提前量 $\overset{\frown}{AB}$，才能击中 B？

(2) 如果人站在盘边缘 C 处射击 B，BC 为直径，他应当怎样瞄准？

13. 在北纬 40°，一质量为 60 公斤的人向东以 9.0 米/秒的速度跑步，求他所受的科里奥利力。

14. 图12.13中 A, B 两质点间的相对加速度称为潮汐加速度。试求地面上相距为 10 厘米的两质点之间的潮汐加速度 a。

全部习题答案

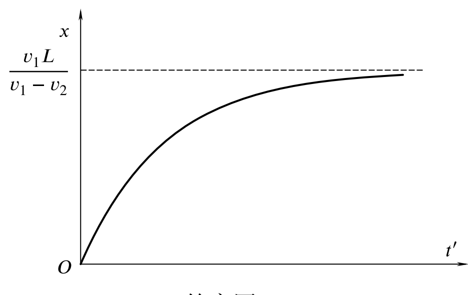
第一章

1. $v_1' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = -\dfrac{v_1 L}{v_1 - v_2} \ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) \times \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^{t'}$

$$a_1' = \frac{\mathrm{d}v_1'}{\mathrm{d}t'} = -\frac{v_1 L}{v_1 - v_2} - \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \times \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{t'}$$

$$x = v_1 t = \frac{v_1 L}{v_1 - v_2}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{t'}\right]$$

因此，x-t' 图即正文中图1.3 的反转。



答案图 1.1

2. (1) 鸟往返了无穷多次

(2) 鸟共飞行了 1 秒，飞行距离为 60 公里

(3) $t = \displaystyle\sum_{h=0}^{t''-1} \left(\frac{L}{v_2 + v_1}\right)\left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right)^n$

其中 v_2 为小鸟速率；v_1 为火车速率

所以得变换为 $t = \dfrac{2}{3} \displaystyle\sum_{n=0}^{t''-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. $\Delta s = 5.02$ 米，方向东偏北 284°

4. (1) 位移 1.73 米；路程 4.19 米；平均速度 $D = 0.41$ 厘米/秒，方向沿位移方向；瞬时速度为 $v = 1.0$ 厘米/秒，方向沿圆在该点的切线

(2) 位移 2.0 米；路程 3.14 米；$v = 0.64$ 厘米/秒，方向沿位移方向瞬时速度 $v = 1.0$ 厘米/秒，方向沿圆在该点的切线方向

5. (1) 61.0 厘米/秒，60.1 厘米/秒，60.01 厘米/秒

(2) 60.0 厘米/秒

(3) $v = 20t$ ，$a = 20$

6. (1) −0.5 米，−0.5 米/秒

(2) 3 米/秒，−6 米/秒

(3) 2.25 米

(4) −9 米/秒^2，3 米/秒^2，−3 米/秒^2

7. (1) $\sqrt{52}$ 米/秒

(2) 20 米/秒

9. (1) 1秒差距 $= 3.0857 \times 10^{16}$米 $= 206.265$AU $= 3.2616$光年

(2) $1\text{AU} = \frac{1}{206265}$秒差距 $= 4.85 \times 10^{-8}$秒差距

10. $t = 7.0$ 秒，$h = 240$ 米

11. (1) 27.4 公里

(2) 166 秒

12. (1) 2.25 秒

(2) 两物在地面上相遇，或不会相遇

13. (1) $t = 1.5$ 秒时，$\alpha = 14°41'$；$t = 2.5$ 秒时，$\alpha = -35°41'$

(2) 经过 0.75 秒，高度 $h = 10$ 米

(3) $R_1 = 10.2$ 米

(4) $R_2 = 82$ 米

15. $v_{01} = 22.8$ 米/秒；$v_{02} = 23.95$ 米/秒

16. (1) $\alpha = 25°$ 或 $65°$

(2) $\alpha = 45°$

17. (1) 取 O 为原点，x 轴竖直向下，则 $x=-\frac{1}{2}gt^2$

    (2) $R=v_0t$

19. 96 厘米

21. 1.82 公里

22. (1) 169 米/秒

    (2) 509 米 (3) 速率 $v=210$ 米/秒，与水平方向夹角 $\alpha=61°$

23. $v=\frac{n}{2}\sqrt{2gh}$

24. (1) 应沿 77°32 的纬线自东向西飞行

    (2) 可以看见太阳从西向东移动

25. $R_{\min}=228$ 米

26. (1) $\omega=20$ 弧度/秒 (2) A 点轨迹的参数方程是如下的摆线

$$x=r(\omega t-\sin\omega t)$$

$$y=r(1-\cos\omega t)$$

$$v=0.5\text{米}$$

$$\omega=20\text{弧度/秒}$$

27. (1) 球心速度 v 与球滚动的角速度 a 的关系为

$$v=\omega\sqrt{r^2-(d/2)^2}$$

    (2) 球面上任一点的轨迹均为摆线

第二章

2. 取 x 轴沿飞机航向，y 轴竖直地指向地面

    (1) 取发射点为原点，炮弹轨迹方程为

$$y=\frac{gx^2}{2\left(v_0+v\right)}$$

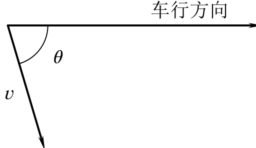
    (2) 取发射点为原点，炮弹轨迹方程为

$$y=\frac{gx^2}{2v^2}$$

(3) 取炮弹质心为原点，飞机发射点之轨迹方程为

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2}$$

3. $|\mathbf{v}| = 21.6$ 公里，与水平的车行方向夹角为 $\theta = 73°54'$，如图所示



答案图 2.1

5. 水流速率 $v = 5.0$ 公里/时

6. (1) $\varphi_1 = tg^{-1}\frac{v_0}{v_1}$

(2) $\varphi_2 = \mathrm{tg}^{-1}\ \frac{v_0}{t_1 + v_2}$

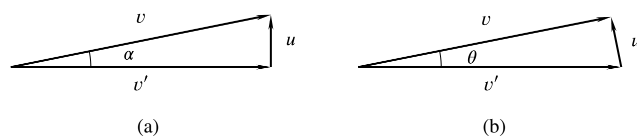
(3) $v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, v'' = \sqrt{\left(v_1 + v_2\right)^2 + v_0^2}$

7. (1) $|\mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + v'^2} = 204$ 公里/时

$$\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\ \frac{u}{v'} = 11°30'$$

(2) $|\mathbf{v}| = \sqrt{v'^2 - u^2} = 195.96 \approx 196$ 公里/时

$$\theta = \sin^{-1}\ \frac{u}{v} = 11°30'$$



答案图 2.2

8. $t_0 = \frac{2L}{u}$

(1) $t_1 = \frac{t_0}{1 - v^2 / u^3}$

(2) $t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2 / u^2}}$

(3) $t_3 = \dfrac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{u^2}\sin^2\theta\left[1-\dfrac{v^2}{u^2}\cdot\dfrac{\cos^2\theta}{1-\left(v^2/u^2\right)\sin^2\theta}\right]}}$

9. $t = 0.37$ 秒，与参考系的选取无关

10. $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2gh}{v}$

11. 5×10^8 年

12. (1) $v_{AB} = v_A + v_B$

(2) $v_{AB} = 1.4c$

(3) 不违反。狭义相对论只是说，在任一惯性系中，光速不变。换一句话说，即：若以此两物之一为参考系，要知另一物的速度就要用相对论的速度合成公式

(4) $v'_B \neq v_{AB}$

13. (1) $0.87l$

(2) $1.15\Delta t$

14. $v = 0.9998c$

15. $\Delta\tau_{赤极} = 1.8843\times 10^5$秒 $= 2.1809$天 $= 5.9750\times 10^{-3}$年

16. $\Delta\tau_{月地} = 9.12\times 10^5$秒 $= 10.55$天 $= 2.89\times 10^{-2}$年

17. $\Delta\tau_{日地} = 7.75\times 10^5$秒 $= 8.979$天 $= 2.46\times 10^{-2}$年

18. $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

19. $\tau = 10\tau_0 = 22$ 微秒

第三章

1. $F_{\min} = 144$ 公斤力
2. 15 吨
3. 25 公斤力
4. 10 米/秒
5. 5.91 米

6. (1) 50 公斤

   (2) 上升时，75 公斤；下降时，25 公斤

7. (1) $(M-m)g$

   (2) $(M-m)g-ma$

8. (1) 98 厘米/秒

   (2) 17.6 牛顿

9. $\mu = \dfrac{m_B(g-a)-m_A a}{m_A g}$

10. $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{1}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$

11. (1) 4.0吨力 $\approx 39.2\times 10^3$牛顿

   (2) 4.0吨力 $\approx 39.2\times 10^3$牛顿

   (3) 4.0吨力 $\approx 39.2\times 10^3$牛顿

   (4) 40.8×10^3牛顿 $\approx 4.1\times 10^4$牛顿

   (5) 3.6×10^4牛顿

   (6) 2.45 米/秒

12. m_2 在桌上时，加速度 $a = 4.9$ 米/秒^2，张力 $T = 1.47$ 牛顿；

   m_1 在桌上时，加速度 $a = 2.45$ 米/秒，张力 $T = 1.47$ 牛顿

13. $a = \dfrac{mg-\mu\left(m_1+m_2+m_3\right)g}{m+\left(m_1+m_2+m_3\right)}$

   $T_1 = m_1(a+\mu g)$

   $T_2 = \left(m_1+m_2\right)(a+ug)$

   $T_3 = m(g-a)$

14. $a = \dfrac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1+m_2+m_3}g$

   $T_1 = m_1(g\sin\alpha - a)$

   $T_2 = m_2 a$

   取 x 轴向右，y 轴向上，则得 A 点承受之支持力为

   $\mathbf{N} = \mathbf{i}N_x + \mathbf{j}N_y$

$N_x = T_1 \cos\alpha$

$N_y = T_1 \sin\alpha + T_2$

B 点拉滑轮的绳 d 承受的张力 $T = \sqrt{2}T_2$

15. $\mu_0 = 0.577$ ， $\mu = 0.530$

16. (1) $F = (M + m)\, g \operatorname{tg}\alpha$

    (2) $a = g \operatorname{tg}\alpha$

17. (1) $mg - \beta v = ma$

    $mg - \beta\dot{z} = m\ddot{z}$

    (2) $v\left(t_0\right) = \dfrac{m}{\beta} g$

    (4) 略

18. (1) $g\sin\theta$，沿斜面向下

    (2) $g\sin\theta$，沿斜面向下

    (3) $(g - a)\sin\theta$，当 $g > a$ 时沿斜面向下

    当 $g < a$ 时沿斜面往上

    当 $g = a$ 时物与斜面相对静止

    (4) $(g + a)\sin\theta$，沿斜面向下

    (5) 0

    (6) $m(g - a)\cos\theta$

20. $a_1 = \dfrac{3}{7} g$ 向下

    $a_2 = \dfrac{1}{7} g$，向上

    $a_3 = \dfrac{1}{7} g$，向上

    $T_1 = 2.23$ 牛顿

    $T_2 = -4.46$ 牛顿

21. $a_2 = 97.4$ 米/秒

22. $\mu_{\min} = 0.394$

23. 张力 $T = \dfrac{Mg}{2\pi} \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

24. (1) $v_0 = \sqrt{lg} = 198$ 厘米/秒

(2) $T = 3mg = 2.94$ 牛顿

25. (1) $v = \sin\theta\sqrt{\dfrac{lg}{\cos\theta}} = \sqrt{gl\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\theta}$

$F = mg\,\mathrm{tg}\,\theta$

26. $h = R - \dfrac{g}{\omega^2}$，或在碗底不动

27. (1) $v = \sqrt{gh}$

(2) $\sqrt{gh\dfrac{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\theta/2}{1+\mu c\,\mathrm{tg}\,\theta/2}} \leqslant v \leqslant \sqrt{gh\dfrac{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\theta/2}{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\theta/2}}$

28. $\sqrt{Rg\dfrac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}} \leqslant v \leqslant \sqrt{Rg\dfrac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}}$

若 $v < \sqrt{Rg\dfrac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}}$，则车往里倒或下滑

若 $v > \sqrt{Rg\dfrac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}}$，则车往外倒或往外跑

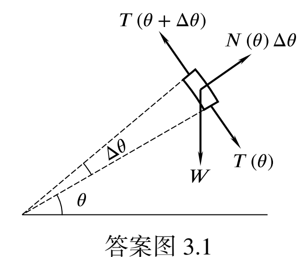
若 $\mu = 1$ 且 $\theta = \pi/4$，则任何速率都可安全行驶

29. (1) $\dfrac{W}{2\cos\theta}$

(2) $\dfrac{W}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta$

30. (1) $T(\theta) = \lambda Rg\sin\theta$

(2) $N(\theta)\,\Delta\theta = 2\lambda Rg\sin\alpha\cdot\Delta\theta$



答案图 3.1

$$\sum N_{水平} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(\theta)\cos\theta d\theta = \lambda P g = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = T_A$$

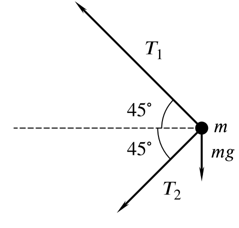
这是绳的平衡条件

31. (1) $a = \dfrac{y}{L}g$

(2) $y(t) = y_0 \operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{g}{L}}t$

32. $T = M\omega^2 l \big/ (2\pi)^2$

33. (1)



答案图 3.2

(2) $T_1 = \dfrac{1}{2}\left(m\omega^2 l + \sqrt{2}mg\right)$

$T_2 = \dfrac{1}{2}\left(m\omega^2 l - \sqrt{2}mg\right)$

34. $T_A \big/ T_B = e^{-\mu\theta}$

35. (1) 图略

(2) $\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g\sin\theta - T = m_2 a \\ N - m_2 g\cos\theta = 0 \end{cases}$

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1+\sin\theta)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{\left(m_2\sin\theta - m_1\right)g}{m_1 + m_2}$$

(3) $\mu_{\min} = \dfrac{\cos\theta\left(m_2\sin\theta - m_1\right)}{m_1(1+\sin\theta)^2 + \left(m_1 + m_2\right)\left(M/m_2 + \cos^2\theta\right)}$

36. $\left(\dfrac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\mu\sin\theta+\cos\theta}\right)g \leqslant a \leqslant \left(\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right)g$

37. 拱形、桥受压力 $N = mg\cos\theta - mv^2/R$

凹形，桥受压力 $N = mg\cos\theta + mv^2/R$

第四章

1. (1) $G=\dfrac{\kappa\theta r^2}{Mml}$

(2) 6.63×10^{-11} 牛顿 · 米/公斤^2

2. $F_{日月}\approx 6\times10^{32}$ 牛顿

$F_{地月}\approx 3\times10^{32}$ 牛顿

3. 3.46×10^5 公里

4. 引力大小为 $\dfrac{2G\rho M}{x}$，方向沿由 M 向直线所作竖直垂线的方向

5. (1) $\dfrac{Gm_1M}{x\sqrt{L^2+x^2}}$，方向从 m_1 指向原点

(2) $Gm_2\rho\left(\dfrac{1}{y-L}-\dfrac{1}{y+L}\right)=Gm_2\dfrac{M}{2L}\left(\dfrac{1}{y-L}-\dfrac{1}{y+L}\right)$，方向沿直线

(3) 约 1.7×10^{-10} 达因

7. (1) $\dfrac{GM_1Mr}{R_0^3}$

(2) $\left(\dfrac{GM_1Mr}{R_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

8. 重 9.96 公斤

9. (1) $\rho_m/\rho_e=0.73$

(2) $g_{火星}=3.7$ 米/秒

10. $M_e\approx5.98\times10^{24}$ 公斤

11. $M_{日}=\dfrac{4\pi^2r^3}{GT^2}=1.97\times10^{33}$克$=1.97\times10^{30}$ 公斤

12. $n\approx6.5\times10^{10}$ 个

13. $F=\frac{GMm}{d^2}\left[1-\frac{1}{8(1-R/2d)^2}\right]$，方向从 m 指向铅球球心

15. $h=280$ 公里

16. (1) 同步卫星轨道平面必须在赤道平面内

 (2) $r\approx 4.2\times 10^4$ 公里 $\sim 7R_0$，R_0 为地球半径

17. (1) $\rho\geqslant\frac{\omega^2}{\frac{4\pi}{3}G}$

 (2) $\rho_{最小}=1.3\times 10^{11}$ 克/厘米 $=1.3\times 10^{14}$ 公斤/米

 (3) $R_{最小}\approx 150$ 公里

 (4) $R\approx 17$ 公里

18. $3R_0$，R_0 为地球半径

19. $M>1.35R\times 10^{23}$ 克，其中 R 以厘米为单位

20. $R<1.47$ 公里

21. (2) 30.2 公里/秒

22. (1) 4.83 天 (2)64.6 天

23. 5.36×10^9 公里

第五章

1. $1+\left[\frac{R(t)}{R_0}\right]^3-2\left[\frac{R(t)}{R_0}\right]^{\frac{3}{2}}=6\pi G\rho_0\left(t-t_0\right)^2$

式中 t_0 表示现在的时刻，ρ_0 及 R_0 分别是 t_0 时刻的平均密度及宇宙尺度因子

2. 因为 $\frac{\mathrm{d}^2R(t)}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{4\pi G}{3}\cdot\frac{\rho_0R_0^3}{R_0}<0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}\right]<0$

所以是减速的

第六章

1. 58 公斤力，5.0×10^2 公斤米，或 4.9×10^3 焦耳

2. (1)11.76×10^5 焦耳

(2) 0.44 马力

3. 1.23×10^{-2} 马力
4. $P = 23.25$ 瓦，能量为 2.01×10^6 焦耳
5. 17 秒
6. 6×10^{-2} 米
7. $mgL/2$
8. 4.2×10^6 焦耳
9. 156 千瓦
10. -22.5 公斤 · 米

13. 下落速度 $v = \sqrt{g\left(L - \frac{a^2}{L}\right)}$
14. $v = 12.1$ 厘米/秒
15. $v_0 = 7.1$ 米/秒
16. $v_{\max} = \frac{m_2 g}{\sqrt{m_1 k}}$
17. $\overline{F} = 12200$ 牛顿 $\approx 1.2 \times 10^4$ 牛顿
18. (1) $E_{k0} = 18.6$ 焦耳，$E_{pt} = 9.8$ 焦耳

    (2) $f_\mu = mg\sin 30^\circ = 0.49$ 牛顿

    (3) 不会再往回滑，所以 $t = \infty$
19. (1) $-mgr(1 - \cos\theta)$

    (2) $mgr(1 - \cos\theta)$

    (3) 径向为 $2g(1 - \cos\theta)$，切向为 $g\sin\theta$

    (4) $\theta = \cos^{-1}(2/3)$
20. (1) $v_{\min} = \sqrt{5gR}$

    (2) $\theta = 19^\circ 30'$ 或 $\theta = \sin^{-1}(1/3)$
21. (1) $v_B = \sqrt{2g(h-R)}$，$F_B = \frac{2mg(h-R)}{R}$，$N_B = \frac{2mgh}{R} - 3mg$

    (2) $h \geqslant 1.5R$

22. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{M}{6m}}\right)$

23. (1) 绳渐伸长。在弹性限度内，升降机的动能转化为绳的弹性势能及升降机的势能变化

(2) 绳上最大张力 $T_{\max} = 9.3$ 吨力伸长量 $\Delta x = 8.3$ 厘米

24. $\frac{M}{M-m}l$

25. 11 倍

26. 取无穷远处为势能的零点

$r > R,\ U(r) = -\frac{GM}{r}$

$r < R,\ U(r) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{GM}{R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{GM}{R^2}r^2$

28. (1) $v_{逃} = \sqrt{2}v_0$

(2) 达 R_0，则 $v_1 = v_0$；达 $\frac{1}{2}R_0$，则 $v_3 = -\frac{1}{3}v_0$

(3) $v\left(R_0 + y\right) = -mv_0 2\left[1 - \frac{y}{R_0} + \left(\frac{y}{R_0}\right)^2 + \cdots\right]$

(4) $v_{\min} = \sqrt{2\left(\frac{v_0^2}{R_0}\right)y\left(1 - \frac{y}{R_0}\right)}$,

或 $v_{\min} = \sqrt{2yg_0}$

30. 9.6×10^7 秒

31. (1) $\sqrt{2gR_e}$，R_e 为地球半径

(2) $mr + k\dot{r} - \frac{GMm}{r^2} = 0$，取地心为坐标原点，$r$ 为流星与地心之距离

(3) $\frac{gm}{k}$

32. (1) 5.75×10^{16} 焦耳

(2) 5.87×10^9 吨

33. 2.23×10^3 吨/秒

第七章

1. $T = 0.73$ 秒
2. 在竖直方向
3. 相同
4. $\varphi_0 = 0$
5. (1) $\dot{y} = A\omega\cos\omega t + 2\omega\cos 2\omega t$

   $\dot{y} = -A\omega^2\sin\omega t - 4\omega^2\sin 2\omega t$

   (2) 不是
8. (1) $\nu = 1.5$ 赫兹

   (2) $A = 2.2$ 厘米

   (3) $\varphi_0 = 24°37' = 0.43$ 弧度

   (4) $x = \sqrt{5}\cos\left(7\sqrt{2}t + 0.43\right)$
9. $T = 2.21$ 秒
10. $t = \pm\dfrac{\pi}{4\omega} - \dfrac{\varphi_0}{\omega} + \dfrac{n\pi}{\omega}, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
11. $T = 0.77$ 秒
12. $m = 1.6$ 公斤
13. (1) 振幅 $A \geqslant 24.83$ 厘米时

    (2) $\nu_{max} = 2.23$ 赫兹
14. $A_{max} = 3.1$ 厘米
15. 120°
16. (1) 14 牛顿/米

    (2) $M = 79$ 克
17. $k_1 = \dfrac{n+1}{n}k, k_n = (n+1)\,k$
18. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$
19. C 点为质心，不动，图7.17 中有 $m_2 l_2 = m_1 l_1$

    m_2 对质心作简谐振动，振动方程为

$x_2 = l_2 + (l_2' - l_2)\cos\omega_2 t, \quad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$

m_1 对质心作简谐振动，振动方程为

$x_1 = -l_1 + (l_1' - l_1)\cos\omega_1 t, \quad \omega_2 = \omega_2$

20. C 点作自由落体运动，m_1, m_2 相对 C 的运动同上题

21. (1) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_1^2 + l_2^2}{(l_1 - l_2)g}} = 1.7$ 秒

(2) $l_0 = 75$ 厘米

23. 75 公里/时

24. $Q \approx 7,000$

25. $Q \approx 13$

第八章

1. $x_c = 13$ 厘米，$y_c = 8$ 厘米
2. $x_c = -0.1$ 米，$y_c = 0.1$ 米
3. 取 x 轴在二圆心联线且从圆盘中心指向孔中心的方向，取盘中心为原点，y 轴过原点与 x 轴垂直，则得 $x_c = -5.6$ 厘米，$y_c = 0$
4. $x_c = 0,\ y_c = -\frac{2a}{8\pi}$
5. (1) 气球向下运动，速率为 $\dfrac{mv}{M+m}$

   (2) 气球静止
6. 2.6 米
7. 4900 公里
8. 取两球心联线为 x 轴，m_1 球心为原点，则：

   (1) $x_c(0) = 0.25$ 米

   (2) $a_c = 2g$

   (3) $x_c(3) = 88$ 米

   (4) $E_0 = 8.9 \times 10^4$ 焦耳

(5) $E' = 3.1 \times 10^4$ 焦耳

10. (1) $\mathbf{a}_1 = 3.5\mathbf{i}$ 米/秒^2，$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{j}$ 米/秒^2，$\mathbf{a}_3 = -1.5\mathbf{i}$ 米/秒^2

(2) $\mathbf{r}_c(0) = (1.75, 0.25)$

(3) $\mathbf{a} = 0.5\mathbf{i}$米/秒^2 + $1\mathbf{j}$米/秒^2

11. (1) $v_A = 58.6$ 米/秒，$v_B = 41.4$ 米/秒

(2) 20%

12. $f = 40$ 牛顿

13. (1) $F/A = 1.8 \times 10^4$ 牛顿/厘米^2，会骨折

(2 $F/A = 3.6 \times 10^2$ 牛顿/厘米^2，不会骨折

14. 600 米/秒

15. 大于 0.86 公斤 · 米/秒

16. 2.4×10^5 米/秒

17. (1) $\left(m_1 + m_2\right) g + \dfrac{2m_1^2}{m_1 + m_2} g$

(2) $\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 R$

19. (1) 取 $\mathbf{v}_1$ 为正方向，则碰后 $\mathbf{v}_1' = 0$，$\mathbf{v}_2' = 16$ 厘米/秒

(2) 取 $\mathbf{v}_1$ 为正方向，碰后共同的速度 $v = 6$ 厘米/秒

20. (1) 车向右加快，$\Delta v = 2.7$ 米/秒

(2) 车速与他未跳下时同，仍为 12.7 米/秒

21. (1) 向右，速率为 4.5 米/秒

(2) 向右，速率为 3.5 米/秒

22. (1) $v = v_0 + \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \frac{mu}{W + am}$

(2) $v = v_0 + \dfrac{nmu}{W + nm}$

23. (1) 8.25×10^8 米/秒

(2) 4.02×10^8 米/秒

24. 需要的力为 $\mathbf{F} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

25. 最终速率 $v = \sqrt{g/k}$

26. $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^2 R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} = 1$

27. (1) $F = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v$，功率 $P = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v^2$

(2) $\dfrac{1}{2}$ 转变成砂子的动能，其余由于滑动摩擦，变成热能消耗

(3) 没有改变

30. $N = (M+m)g + mg\sqrt{1 + \dfrac{2kh}{g(M+m)}}$

31. (1) $v_A = \sqrt{\dfrac{2M^2 gh\cos^2\theta}{(M+m)\left(M + m\sin^2\theta\right)}}$

$\mathbf{v}_A = \sqrt{\dfrac{2m^2 gh\cos^2\theta}{(M+m)\left(M + m\sin^2\theta\right)}}$

$v_B = \sqrt{\dfrac{2Mgh}{M+m}}$

$\mathbf{v}_B = \sqrt{\dfrac{2m^2 gh}{M(M+m)}}$

(2) $\Delta E_A = mgh\left(1 - \dfrac{M\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta}\right)$，这部分能量是 m 与桌面在竖直方向发生完全非弹性碰撞损失的

$\Delta E_B = 0$

32. (1) $v_{c0} = \sqrt{2gH}$，方向沿 AC 方向

(2) $v_c = U_{c0}\cos\theta$，方向沿水平即 CD 方向

(3) $\Delta P = mv_y = m\sqrt{2gH}\sin\theta = mv_{c0}\sin\theta$，方向竖直向下

$\Delta E = \dfrac{1}{2}mv_{c0} - \dfrac{1}{2} - mv_c^2 = mgH\sin^2\theta$，这是由于在竖直方向和地面的完全非弹性碰撞而损失的能量

33. (1) $s = \dfrac{h}{\mu}(1 - \mu\operatorname{ctg}\theta)\left(1 - \sin^2\theta - 2\mu\sin\theta\cos\theta + \mu^2\sin^2\theta\right)$

(2) 当 θ 很小时

$$s \approx \frac{h}{\mu}(1 - \mu \operatorname{ctg}\theta) \tag{i}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{s_0}{h} \tag{ii}$$

第六章习题 11 结果是 $s + s_0 = \dfrac{h}{\mu}$。本习题上面的结果 (i)，(ii) 联合，即得 $s + s_0 \approx \dfrac{h}{\mu} - h\operatorname{ctg}\theta + h\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{h}{\mu}$ 与第六章相同

34. (1) $v = \sqrt{\dfrac{2}{3}gx}$

(2) 2/3

35. (1) $v = u\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{m}{M}t}\right)$

(2) $\eta = 2\left(\dfrac{u}{v}\right)\left(1 - \dfrac{v}{u}\right)$；$v = \dfrac{u}{2}$ 时，η 最大，$\eta_{\max} = \dfrac{1}{2}$。式中 η, v 都是数值

第九章

1. (1) $L_c = 2ml^2\omega$，方向垂直于棍所在的平面

$\mathbf{L}_o = \mathbf{L}_c$

(2) $L_c = mR^2\omega$，方向垂直于圆环的面

$\mathbf{L}_o = \mathbf{L}_c$

3. (1) $\omega(t) = \omega_0\left(\dfrac{r_0}{r_0 - vt}\right)^2$

(2) $F = m\dfrac{\omega_0^2 r_0^4}{r_0 - vt}$

4. (1) 3.9×10^3 公斤 · 米^2/秒

(2) 13 米/秒

(4) 406 公斤力

5. (1) 绕粘结点 (质心) 转动

(2) $\omega = \dfrac{3v}{2l}$

6. 4.73×10^5 公里

7. (1) $r=\dfrac{\beta^2R_0}{1+\left(\beta^2-1\right)\cos\varphi}$，原点为原有的圆心，火箭爆发点相应于 $\varphi=0$

(2) 飞船点火时，即火箭爆发，相应 $\varphi=0$，所以速度方向为 $\pi/2$

$r\to\infty$ 为逃逸，相应于 $\cos\varphi_\infty=-\dfrac{1}{\beta^2-1}$，$\alpha=\varphi_\infty-\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\sin\alpha=-\cos\varphi_\infty=\dfrac{1}{\beta^2-1}$

当 $\beta=\sqrt{3}$ 时，$\alpha=30^\circ$

8. (1) $r=\dfrac{R_0}{1+\cos\varphi}$

9. 地球自转角动量为 5.23×10^32 公斤 · 米/秒

10. $\omega=\dfrac{mR^2v}{\frac{1}{2}MR_1^2+mR_2^2}$

11. 角速度变化 $\Delta\omega=\dfrac{mR^2}{I}\omega$

能量变化 $\Delta E=\dfrac{1}{2}mR^2\omega^2+\dfrac{m^2R^4}{2I}\omega^2$

12. (1) 小球反向以 u 运动，$u=\dfrac{v\left(m_0-3m\right)}{m_0+3m}$

板向前方以角速度 ω_1 旋转 $\omega_1=\dfrac{6mv}{\left(m_0+3m\right)a}$

(2) $\omega=\dfrac{3mv}{\left(m_0+3m\right)a}$

13. 月-地距 $>1.5\times10^6$ 公里时，月会飞掉

第十章

5. $I=\dfrac{1}{12}m\left(a^2+b^2-\dfrac{2c^4}{ab}\right)$

6. $I=\dfrac{m}{12ab}\left(a^3b+b^3a-6\pi r^4\right)$

7. (1) 16×10^4 克 · 厘米^2

   (2) 1.2×10^4 克 · 厘米^2

8. $I=\frac{1}{2}-m\left(R_1^2+R_2^2\right)$

9. $I=\frac{1}{4}mR^2$

10. $I=\frac{m}{12}h^2+\frac{1}{4}mR^2$

11. $\beta=3.28$ 弧度/秒$_2$

12. $a_c=\frac{5}{7}g\sin\alpha$

13. $\beta=-2.1$ 弧度/秒$_2$，$n=70.8$ 转，再经 40 秒停止

14. $v=2\sqrt{\frac{mgh}{2m+M}}$

15. $T=\frac{m_1\mu+m_1+M\mu}{m_1+m_2+M}g,\quad T'=\frac{m_2+m_2\mu+M}{m_1+m_2+M}g$

    $a=\frac{m_1-m_2\mu}{m_1+m_2+M}g$

16. $a=-\frac{2}{3}g$，$T=\frac{1}{3}mg$

17. $f=29$ 公斤力

18. $v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}=2\sqrt{\frac{gh}{3}}$

19. $f=3.59\times10^3$ 牛顿

20. $a=\frac{4(2M-m)}{8M+7m}g,\quad T_1=\frac{mg}{8M+7m}(5M+3m)$

    $T_2=\frac{mg}{8M+7m}(7M+2m),\quad T_3=\frac{11Mm}{8MI+7m}g$

21. (1) $a=2.33$ 米/秒$_2$

    (2) $T_1=35$ 牛顿，$T_2=37.32$ 牛顿

22. 转了 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}$ 转

23. $M=-0.08$ 牛顿 · 米，其中负号表示与原转动角动量反方向

24. (1) $v_B=12.1$ 米/秒

(2) $y_H=3.33$ 米

25. 球先到下端，$v_{c\text{质点}}>v_{c\text{球}}>v_{c\text{柱}}$

26. (1) $a_{c1}=\frac{5}{7}g\sin\alpha,\quad v_{c1}=\sqrt{\frac{10}{7}gh},\quad \omega_1=20\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

$a_{c2}=\frac{5}{7}g\sin\alpha,\quad v_{c2}=\sqrt{\frac{10}{7}gh},\quad \omega_2=10\sqrt{\frac{10}{7}gh}$

$a_{c3}=\frac{3}{5}g\sin\alpha,\quad v_{c3}=\sqrt{\frac{6}{5}gh},\quad \omega_3=20\sqrt{\frac{6}{5}gh}$

$a_{c4}=\frac{3}{5}g\sin\alpha,\quad v_{c4}=\sqrt{\frac{6}{5}gh},\quad \omega_4=10\sqrt{\frac{6}{5}gh}$

(2) 同样结构的球 (实或空)a_c 与 m,r 无关，但 $\omega\propto\frac{1}{r}$

同样的材料、同样尺寸，则 $a_c,\omega\propto\frac{1}{I}$

27. $t=2.1$ 秒

28. $\omega_0>\frac{5}{2}\cdot\frac{v_0}{R}$ 时, 成为“来去”；$\omega_0=\frac{2}{5}\cdot\frac{v_0}{R}$, 则同时停转又停止

29. $\mu\geqslant\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$

第十一章

1. $\tau=1.57\times10^{-5}$ 秒

2. $v'_B=-0.95c$

5. (1) 160 公里/秒

(2) 40 公里/秒

(3) $v_{\text{前投}}=159.9999893$ 公里/秒，$v_{\text{后投}}=40.00000266$ 公里/秒

6. 车上乘客认为 B 先开枪，过了 10 毫微秒 A 才动手

7. (1) $E_{\text{总}}=5.81\times10^{-13}$ 焦耳

(2) $E_{K(\text{牛})}=4.02\times10^{-14}$ 焦耳，$E_{K(\text{相})}=4.99\times10^{-13}$ 焦耳，

$E_{K(\text{牛})}/E_{K(\text{相})}=0.08$

8. 少算了 $\Delta E_K \approx 2.7\times10^4$ 焦耳，用它可将飞船从地面上升高 0.34 米

9. $P = 7.47\times10^{-18}$ 公斤 · 米/秒

   $E = 2.53\times10^{-9}$ 焦耳

   $m_0 = 1.31\times10^{-26}$ 公斤 ≈ 8 个质量数

10. 4.258×10^{-12} 焦耳 $= 2.65\times10^7$ 电子伏特

11. (1) 4.8×10^{-16} 焦耳

    (2) $v = 3\times10^7$ 米/秒

    (3) 误差 $\dfrac{E_{相} - E_{牛}}{E_{相}} \approx 15\%$

12. $v_{\max} = \dfrac{4}{5}c$

第十二章

1. (1)7.66 公斤 (2)5.31 公斤力
2. 4.64×102 米/秒
3. (1) $\alpha = 0, T = mg$

   (2) $\alpha = 0, T = mg$

   (3) $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a}{g}, T = m\sqrt{a^2+g^2}$

   (4) $\alpha = \theta, T = mg\cos\theta$

   (5) $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{b\cos\theta}{g+b\sin\theta}, T = m\sqrt{g^2+b^2+2bg\sin\theta}$

   (6) $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{b\cos\theta}{g-b\sin\theta}, T = m\sqrt{g^2+b^2-2bg\sin\theta}$

式中 α 为小球处于平衡位置时悬线与指向地面铅垂线之间的夹角

4. (1) $U = mgJ(1-\cos\alpha)$，设摆锤在最低点时位能为零

   (2) $A = \int_0^{\infty} mal\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = mal sin\alpha$

   (3) $a_{\max} = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a}{g}$

(4) $\alpha_0 = \text{tg}^{-1}\dfrac{a}{g}$，所以 $\alpha_{\text{max}} = 2\alpha_0$ 放手后，摆锤以 α_0 位置为平衡点，作振幅为 $\dfrac{1}{2}\alpha_{\text{max}}$ 的周期振动

5. 见第三章例 7

6. 设 g_0 为地球海平面的重力加速度，g 为飞机所在处的重力加速度，**F** 为驾驶员作用于座位上的力，**F** 与向下的竖直方向夹角为 φ

(1) $F = \dfrac{R}{g_0}\sqrt{a^2 + g^2 + 2ag\cos\theta},\ \varphi = \text{tg}^{-1}\dfrac{a\sin\theta}{g + a\cos\theta}$

(2) $F = P\dfrac{g+a}{g_0},\ \varphi = 0$

(3) $F = \dfrac{P}{g_0}\sqrt{a^2 + g_2},\ \varphi = tg^{-1}\dfrac{a}{g}$

(4) $F = 0$

(5) $F = P\dfrac{g}{g_0}, \varphi = 0$

7. (1) $P_{\text{min}} = 1.97$ 公里

(2) 300 公斤

9. (1) $y = \sqrt{\dfrac{gR}{\mu_s}}$

(2) $v = 14$ 米/秒

(3) $a = 11.09^\circ \approx 11^\circ$

11. 水平方向向东 $\Delta s = 22.7$ 米

12. (1) $\widehat{AB} = \omega\dfrac{R^2}{v}$

(2) $\widehat{AB} = 4\omega\dfrac{R^2}{v}$

13. $\mathbf{F} = (\underbrace{-0.05\mathbf{j}}_{\text{向南}} + \underbrace{0.06\mathbf{k}}_{\text{向上，抵消一部分重力}})$ 牛顿

14. $a = g\theta$，$\theta = 1.56 \times 10^{-11}$ 弧度，所以 $a = 1.53 \times 10^{-10}$ 米/秒^2，方向沿着地面二者之联线

重 排 后 记

《力学概论》，方励之、李淑娴合著，安徽科学技术出版社出版。1986 年 1 月第一次出版。

作者自述道："这本书原是一份普通物理课程的力学讲义，它曾在中国科学技术大学沿用多年，也曾在北京大学教授过数次。"实际上，即使在某事件之后学校改用梁昆淼先生的《力学》作为正式教科书，也在相当长的一段时间内作为实际的教科书在科大学子和老师中沿用。

由于某些原因，该书已经不可能再出版了，纸质书籍也难以觅得踪迹。网上仅见一份 1986 年 1 月第一版的扫描本，精度较差，字迹模糊，不少细节难以分辨。本重排版采用 LaTeX 根据该扫描本重新编排并绘制了全部插图（个别图片替换为网上寻得的高清晰图片），对明显的错漏做了更正。

由于原书铅字人工排版印刷，与 LaTeX 排版相比，存在较大差异。在重排过程中，无法实现完全相同的效果，只能在可能的情况下，尽量按照原书页码安排内容。

重排版全部源代码文件在网上公开，项目地址如下：

https://github.com/chianjin/outline-of-mechanics

当然个人精力、水平有限，亦难免遗漏或者改错之处。阅读者如有发现，可前往上述网址讨论或提交相关信息。如有兴趣者，亦可在上述项目网址联系本人参与修订。

特 别 提 示